HÀN LIÊN HẢI - NGÔ LONG HẬU
MAI TRƯỜNG GIÁO - HOÀNG NGỌC ANH

500
BÀI TOÁN
CHỌN LỌC 11

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀN LIÊN HẢI – NGÔ LONG HẬU
MAI TRƯỜNG GIÁO – HOÀNG NGỌC ANH

500 BÀI TOÁN
CHỌN LỌC LỚP 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN ĐỀ BÀI

1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số lượng giác

1. Nêu định nghĩa hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

2. Xác định tập xác định, tập giá trị, tính chẵn lẻ, tính tuần hoàn và chu kì, khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số :

a) $y = \sin x$, b) $y = \cos x$, c) $y = \tan x$, d) $y = \cot x$

3. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

4. a) Chứng minh chu kì của hàm số $y = f(x) = A\sin(\omega x + \alpha)$ là $\dfrac{2\pi}{\omega}$ $(\omega \neq 0, A \neq 0)$.

b) Chứng minh chu kì của hàm số $y = g(x) = A\tan(\omega x + \alpha)$ là $(\omega \neq 0, A \neq 0)$.

5. Xác định tập xác định, tập giá trị, tính chẵn lẻ, tính tuần hoàn, chu kì của hàm số $y = \sin 2x$, $y = \tan 2x$.

6. Tìm giá trị của α để biểu thức sau có giá trị nhỏ nhất :

$$A = \frac{1}{1 + \sin\alpha}\ ; \qquad B = \frac{1}{1 - \cos\alpha}$$

7. Xét dấu các biểu thức sau :

a) $\tan 220^o - \tan 217^o$ b) $\cot 100^o - \tan 100^o$ c) $\sin 58^o - \sin 32^o$

d) $\sin 81^o - \tan 81^o$ e) $\cot 125^o - \cos 125^o$ f) $\cos 100^o - \sin 100^o$

g) $\tan 200^o \cos 350^o$.

8. Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức :

a) $\cos(\alpha + \pi)$. b) $\tan(\alpha - \pi)$. c) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$. d) $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{8}\right)$.

9. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$. b) $y = \cot\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$. c) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$. d) $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

10. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số :

a) $y = \cot x + 2\sin x$; b) $y = \sin^2 x - \cos x$;
c) $y = \cos 5x \sin 2x$; d) $y = \tan x + \cot x$

11. 1) Chứng minh rằng các hàm số sau đây là tuần hoàn với chu kì 2π:

a) $y = \cos x + \sin x$; b) $y = \cos x + \cos 2x$

2) Chứng minh rằng các hàm số sau đây là tuần hoàn với chu kì π:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \cos 2x$; c) $y = 3\sin 2x + \tan x$

12. Tìm chu kì tuần hoàn của các hàm số sau :

$y = \sin 5x$; $y = 3\cos 6x$; $y = \sin\frac{x}{2}$; $y = \cos\frac{x}{3}$

$y = |\cos x|$; $y = |\cos x| + |\sin x|$

13. Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy.

a) $y = \sin x$ và $y = 2\sin x$; b) $y = \cos x$ và $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = \sin x$ và $y = \sin 2x$

2. Phương trình lượng giác cơ bản

Giải các phương trình sau :

14. a) $\sin x = \sin\alpha$; b) $\cos x = \cos\alpha$; c) $\tan x = \tan\alpha$; d) $\cot x = \cot\alpha$.

15. a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\frac{x}{4} = \sqrt{3}$; d) $\cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Giải các phương trình lượng giác sau :

16. a) $\sin^2\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3} = 0$; b) $\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$

c) $\sin^2 x - \sin^4 x + \cos^4 x = 1$; d) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^2 x\sin^2 x = \sin x$

e) $\cot^3 x = \cot^2 x$; g) $\sin x = \cos x$

17. a) $5\sin x - 2\cos x = 0$; b) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$

c) $\cot\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$; d) $2\sin\frac{x+1}{4} + 1 = 0$

e) $\sin 2x \cos 3x = 0$; g) $\sin 2x = \sin 3x$

h) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$

18. a) $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. b) $\cos 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

c) $\tan\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$. d) $\sin 2x = -\sin\frac{x}{2}$.

e) $\tan 3x + \cot\frac{x}{3} = 0$.

g) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

h) $\tan x \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

19. a) $\sin x + 2\sin x\cos x = 0$.

b) $\cos 5x + \cos 2x\cos 5x = 0$.

c) $\cot x - \cos x = 1 - \sin x$.

d) $1 + \sin x\cos 3x + \sin x + \cos 3x = 0$.

20. a) $5\cos x + 2\sin x = 5\cos x\cos 2x + 2\sin x\cos 2x$.

b) $\sin x\tan x + \cos x\cot x = \sin x + \cos x$.

c) $1 + \cos x = \sin x + \tan x$.

d) $\sin x - \cos x + 2\sin x\cos x = 0{,}5$.

21. a) $\sin x\cot x + \cos x\tan x = 0$.

b) $\sin^3 x(1 - \cot x) - \cos^3 x(1 - \tan x) = 0$.

c) $\sin x\cos x + 2 = \cos x + 2\sin x$.

d) $2(1 + \sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos x = 0$.

e) $1 - \sin^4 x - \cos^4 x = 0$.

3. Một số phương trình lượng giác thường gặp

22. Giải phương trình : $a\cos x + b\sin x = c$ $(a, b \neq 0)$

23. Giải các phương trình lượng giác sau :

a) $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$.

b) $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$(*).

c) $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$.

c) $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$.

24. Giải phương trình:

1) $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$(**).

2) $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

25. Giải các phương trình lượng giác sau :

a) $3\cos x - 4\sin x = 5$.

c) $4\sin 2x - \cos 2x = -4$.

b) $5\cos 2x + 3\sin 2x = 6$.

d) $3\sin x + 7\cos x = 3$.

26. Tìm m để mỗi phương trình sau có nghiệm :

a) $m\sin x - \cos x = m + 1$.

b) $(2m - 1)\cos 2x + m\sin 2x = m - 1$.

c) $\cos^2 x - 2\cos x = m$.

d) $\cos 2x - \sin x + m = 0$.

(*) Các phương trình ở câu a), b) bài 23 gọi là phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx, cosx.

(**) Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx.

27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số :

a) $y = 5\cos x - 2\sin x$. b) $y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$.

c) $y = (3\sin x - 4\cos x)(4\sin x - 3\cos x)$. d) $y = \dfrac{\cos x - 2\sin x}{2 - \sin x}$.

e) $y = \dfrac{2\cos x - \sin x - 1}{2 + \cos x + \sin x}$.

28. Tìm k để hàm số $y = \dfrac{k + \cos x}{2 + \sin x}$ có giá trị lớn nhất lớn hơn 3.

29. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{m\cos x - 1}{2 - \sin x}$ lớn hơn $\dfrac{1}{3}$.

30. Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{k - \sin x}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$.

31. Tìm k để PT sau vô nghiệm:

a) $(k + 1)\sin x - k\cos x = 2k$. b) $\sin^2 x + 2\cos x = 2k$.

32. Tìm các nghiệm của phương trình $\sin x\cos 4x - \sin^2 2x = 4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{7}{2}$ thoả mãn điều kiện $|x - 1| < 3$.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội – A–2000).

33. Giải phương trình : $|\cos x| + \sin 3x = 0$.

34. Cho phương trình: $3\cos x + 2|\sin x| = k$. Giải phương trình với $k = 2$ và $k = 3$.

35. Giải phương trình : $\dfrac{3(\cos 2x + \cot 2x)}{\cot 2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2$.

36. Cho phương trình (ẩn x) :

$x^2 - (2\sin\alpha - 1)x + 6\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 = 0$ (*) (α là tham số)

a) Tìm α để phương trình có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ khi α biến thiên.

37. Cho phương trình : $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = k\cos x$.

a) Giải phương trình với $k = 2$.

b) Giải và biện luận phương trình trong trường hợp tổng quát.

38. Giải phương trình :

1) $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$

2) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}(\tan x + \cot x)$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội – D–2000).

39. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + m(\tan x + \cot x) - 1 = 0.$$

40. Cho phương trình : $(1-a)\tan^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0.$

a) Giải phương trình với $a = \frac{1}{2}$.

b) Tìm a để phương trình có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$.

41. Cho phương trình :

$(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0$

a) Giải phương trình với m = 2.

b) Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

42. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = 1 + \frac{3\sin x}{2+\cos x}$$

(Trích đề thi ĐH Giao thông vận tải, năm 1997).

43. Giải phương trình $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$.

(Trích đề thi Học viện Quan hệ quốc tế, năm 1997)

44. Giải phương trình : $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0$

(Trích đề thi ĐH Thương mại, năm 1997)

45. 1) Giải phương trình : $3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6$

2) Giải phương trình : $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$.

46. Giải phương trình : $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{3}{2}\sin 4x$.

(Trích đề thi ĐH Giao thông vận tải – 1997).

47. 1) Giải phương trình : cotx – tanx = sinx + cosx.

2) Giải phương trình : 2sinx + cotx = 2sin2x + 1.

(Trích đề thi Học viện Ngân hàng – 2000).

48. Cho phương trình : $\cos^3 x - \sin^3 x = m$ (1)

1) Giải phương trình (1) khi m = –1.

2) Tìm m sao cho phương trình (1) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

(Trích đề thi ĐH Quốc gia TP. Hồ Chí Minh – A, 2000)

4. Các phương trình lượng giác khác

49. 1) Giải các phương trình :

a) $1 - \tan^2 x = 2\tan x \tan 2x$; b) $\sin 4x = 2\cos^2 x - 1$;

c) $8\cos^4 x - \cos 4x = 1$.

2) Giải các phương trình :

a) $1 + \cos 2x + \sin x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$; b) $\sin^2 2x + \sin^2 4x = \frac{3}{2}$;

c) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cos x$.

50. 1) Giải phương trình : $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$ (1)

(Trích đề thi ĐH Thuỷ lợi cơ sở II – 2000)

2) Giải các phương trình sau :

a) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$; b) $\sin 4x = \tan x$.

(Trích đề thi ĐH Y Hà Nội – 2000)

51. 1) Giải phương trình :

$$\left(\sin^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3 \frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\cos^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3 \frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{81}{4}\cos^2 4x.$$

2) Giải phương trình : $\sin 4x - 4\sin x - (\cos 4x - 4\cos x) = 1$.

52. 1) Giải phương trình : $3(\cot x - \cos x) - 5(\tan x - \sin x) = 2$

(Trích đề thi ĐH Giao thông vận tải, 1997).

2) Giải phương trình : $\dfrac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$.

(Trích đề thi ĐH Xây dựng, 1997).

53. 1) Giải phương trình : $\tan^2 x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$.

2) ΔABC có các góc nhọn và trực tâm H chia đường cao AA' theo tỷ số $\dfrac{HA}{HA'} = m$. Tính tanBsinC và chứng minh $\tan A \ge \dfrac{2\sqrt{m+1}}{m}$.

54. Cho phương trình : $\sin x + m\cos x = 1$ (1)

a) Giải phương trình với $m = -\sqrt{3}$.

b) Tìm m để phương trình (1) vô nghiệm.

c) Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của phương trình :

$$m\sin x + \cos x = m^2.$$

55. 1) Giải phương trình : $\tan^4 x + 1 = \dfrac{(2-\sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$.

2) Giải phương trình : $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

(Trích đề thi ĐH, CĐ khối A – 2003).

56. a) Giải phương trình : $\tan x - 2\sqrt{2}\sin x = 1$.

b) Tìm a để hàm số $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x}$ được xác định với mọi giá trị của x.

(Trích đề thi vào các trường ĐH năm 1997, đề chính thức cho khối A).

57. Giải phương trình : $\dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{1}{4}$.

(Đề thi vào các trường đại học năm 1982).

58. Giải phương trình : $2\cos^3 x = \sin 3x$.

(Trích đề thi Học viện kĩ thuật Quân sự, 1997).

59. Tìm a để phương trình : $\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$ có nghiệm,

giải phương trình với $a = \dfrac{5}{6}$.

(Trích đề thi vào các trường ĐH năm 1975, khối A)

60. Cho phương trình : $\cos 2x + \sin^2 x + b\cos x + 1 = 0$.

a) Giải phương trình với $b = 2$.

b) Tìm b để phương trình có nghiệm.

(Trích đề thi vào các trường ĐH năm 1976, khối A)

61. a) Chứng minh rằng nếu $|m| \le \sqrt{24}$ thì $\cos 2x + m\cos x + 4 \le 0$ với mọi x.

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $\cos 2x + m\cos x + 4 \ge 0$ với mọi x.

(Trích đề thi vào các trường ĐH năm 1978)

62. 1) Giải phương trình :

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 + \sin 2x$$

2) Tìm m để phương trình :

$$\frac{1}{2}\cos 4x + 4\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = m \text{ không có nghiệm.}$$

63. Giải phương trình :

$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$.

(Trích đề thi ĐH Ngoại thương, khối A, 1997).

64. Giải phương trình :

$$2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}.$$

(Trích đề thi ĐH Quốc gia Hà Nội, khối B, 1997)

65. Giải phương trình :

$$(\cos 2x-\cos 4x)^2=6+2\sin 3x.$$

(Trích đề thi ĐH An ninh, 1997, khối A)

66. Giải phương trình:

$$\frac{\sin 5x}{5\sin x}=1.$$

(Trích đề thi ĐH Mỏ - Địa chất - 1997)

67. Giải phương trình :

$$\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}.$$

(Trích đề thi Đại học Y khoa Hà Nội - 1997).

68. Cho phương trình $\sin^2 4x-\cos^2 6x=\sin(10{,}5\pi+10x)$.

Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

(Trích đề thi ĐH Dược Hà Nội - 1999).

69. Xác định tham số m để phương trình :

$$\cos 3x-\cos 2x+m\cos x-1=0$$

có đúng bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$

(Trích đề thi ĐHY Dược TP Hồ Chí Minh - 1999).

70. 1) Giải phương trình :

$$\sin^8 x+\cos^8 x=2(\sin^{10} x+\cos^{10} x)+\frac{5}{4}\cos 2x.$$

(Trích ĐH Ngoại thương - A - 2000).

2) Giải phương trình :

$$\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}.$$

(Trích ĐH Thương mại - 2000).

2. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

71. Có 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hỏi có bao nhiêu cách viết các số :

a) Có 6 chữ số.

b) Có 6 chữ số đôi một khác nhau.

c) Có 4 chữ số.

d) Có 4 chữ số đôi một khác nhau.

72. Có 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hỏi có bao nhiêu cách viết các số:

a) Chia hết cho 5 và có 3 chữ số khác nhau.

b) Có 6 chữ số khác nhau và là số lẻ.

c) Có 4 chữ số khác nhau và lớn hơn 3000.

d) Có 3 chữ số khác nhau không nhỏ hơn 243.

e) Có 3 chữ số khác nhau nhỏ hơn 243.

73. Một lớp có 15 học sinh nữ, 25 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra những tổ 5 người :

a) Nam, nữ tuỳ ý, không phân biệt nhiệm vụ.

b) Có 3 nam, không phân biệt nhiệm vụ.

c) Có ít nhất 2 nữ, không phân biệt nhiệm vụ.

d) Tổ trưởng là nữ, số còn lại không phân biệt nhiệm vụ.

74. Một lớp có 15 học sinh nữ, 25 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra những tổ 5 người :

a) Tổ trưởng là nam và còn ít nhất 2 nam nữa.

b) Một tổ trưởng, một tổ phó, 3 tổ viên.

c) Mỗi người sẽ phụ trách một trong 5 đội thiếu niên cụ thể của phường X.

75. Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể viết được bao nhiêu số :

a) Có 5 chữ số khác nhau.

b) Có 5 chữ số.

c) Có 3 chữ số khác nhau.

d) Có 3 chữ số khác nhau và là số lẻ.

e) Có 3 chữ số khác nhau và nhất thiết có chữ số 2.

76. Một cơ quan có 12 chuyên viên gồm 7 nam, 5 nữ. Cần lập một ban quản lí dự án gồm 5 người trong đó phải có 1 tổ trưởng nam và 1 thủ quỹ nữ. Có bao nhiêu cách phân công biết rằng khả năng của các chuyên viên là đồng đều.

77. Trong hộp có 5 bi đỏ, 6 bi xanh, 7 bi vàng kích thước như nhau. Có bao nhiêu khả năng chọn ra đồng thời :

a) 4 viên bi cùng màu.

b) 4 viên bi không đủ 3 màu.

78. Giải các phương trình, hệ phương trình và bất phương trình

a) $C_{x-1}^{3} - C_{x-1}^{2} = \frac{2}{3}A_{x-2}^{2}$.   b) $C_{x}^{1} + C_{x}^{2} + C_{x}^{3} = \frac{7}{2x}$.

c) $\frac{1}{C_{x}^{1}} - \frac{1}{C_{x+1}^{2}} = \frac{7}{6C_{x+4}^{1}}$.   d) $\begin{cases} 5C_{x}^{y-2} = 3C_{x}^{y-1} \\ C_{x}^{y} = C_{x}^{y-1} \end{cases}$.

e) $A_{n}^{2} - C_{n}^{1} < 8$.

79. a) Tính hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển của :

$$P(x) = (2x + 1)^3 - (3x + 1)^4 + (x + 1)^7.$$

b) Khai triển của $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ có tổng các hệ số của 3 số hạng đầu là 28. Tìm số hạng thứ 5 của khai triển đó.

c) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$.

d) Xét khai triển của $(x^3 + xy)^{15}$

+ Tìm 2 hạng tử chính giữa.

+ Tính hệ số của hạng tử chứa $x^{21}y^{12}$.

80. Có 8 ghế xếp thành hàng ngang. Có 4 nam, 4 nữ. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách xếp 8 bạn trên vào chỗ ngồi ?

b) Có bao nhiêu cách xếp cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau ?

c) Có bao nhiêu cách xếp cho các bạn nữ ngồi liền nhau ?

81. Có bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tiệc tròn. Có 4 nhà giáo, 2 bác sĩ và 1 nghệ sĩ được xếp vào ngồi xung quanh bàn tiệc đó. Có bao nhiêu cách xếp sao cho :

a) Vị trí ngồi là tuỳ ý.

b) Nghệ sĩ ngồi giữa 2 bác sĩ.

c) Nghệ sĩ ngồi giữa 2 nhà giáo.

82. Trên một đường tròn có 15 điểm.

a) Có thể dựng được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của chúng thuộc tập hợp 15 điểm đó ?

b) Có bao nhiêu đường chéo trong đa giác lồi 15 cạnh nội tiếp đường tròn đó ?

83. Gieo con xúc xắc cân đối, đồng chất và quan sát số chấm xuất hiện :

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau và tính xác suất :

A : "Mặt có chấm lẻ xuất hiện"

B : "Xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 5"

C : "Xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn 5 và lẻ"

84. Rút ngẫu nhiên một viên bi từ 1 hộp có 5 bi trắng, 10 bi đỏ, 3 bi xanh. Các viên bi đồng chất, kích thước như nhau. Xác định xác suất để :

a) Bi trắng được rút ra. b) Bi đỏ được rút ra.

c) Bi xanh không được rút ra.

85. Chọn ngẫu nhiên 4 bạn từ 5 bạn nam và 6 bạn nữ để làm trực nhật. Tính xác suất cho trong số được chọn có :

a) Cả 4 bạn đều là nữ. b) Có đúng 3 bạn là nữ.

c) Có ít nhất 1 bạn là nữ.

86. Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 2 lần và chú ý đến số chẵn xuất hiện ở mỗi lần gieo.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau, đếm số phần tử và tính xác suất của các biến cố đó :

A : "Số chấm ở 2 mặt khác nhau"

B : "Tổng số chấm ở 2 mặt lớn hơn 9"

C : "Mặt 4 chấm xuất hiện trong lần gieo đầu"

D : "Mặt 3 chấm xuất hiện ít nhất 1 lần".

87. Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 3 lần. Tính xác suất của các biến cố sau :

a) A : "Tổng số chấm của 3 lần gieo là 8".

b) B : "Tổng số chấm của 3 lần gieo là 8 và không xuất hiện mặt 6 chấm".

88. Gieo một con xúc xắc 5 lần. Tính xác suất để :

a) Ít nhất một lần xuất hiện mặt 5 chấm.

b) Xuất hiện các mặt có số chấm bằng nhau.

89. Gieo một con xúc xắc 10 lần. Tính xác suất để :

a) Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm.

b) Xuất hiện các mặt có số chấm là số lẻ.

90. Có 5 tấm bìa như nhau được đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên 3 tấm và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố :

A : "Số thu được là số chẵn"

B : "Tổng các số trên các tấm bìa là 9".

91. Có 2 hộp. Mỗi hộp chứa 1 quả cầu đen, 1 quả cầu vàng, 1 quả cầu trắng. Từ mỗi hộp lấy ra 1 quả cầu. Kí hiệu :

A : "Cả 2 quả cùng màu"

B : "Cả 2 quả đều trắng"

C : "Quả đầu tiên màu đen"

Tính xác suất của các biến cố : A, B, C, $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$.

92. Có 6 nam và 6 nữ được xếp vào 12 ghế sắp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho :

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

b) Nữ ngồi liền nhau.

93. a) Có 6 nam và 6 nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

b) Có 6 nam và 4 nữ được xếp ngồi quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho không có 2 bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

94. Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất 2 lần. Tính xác suất sao cho :

a) Tổng số chấm của hai lần gieo lớn hơn 9 và lần gieo đầu xuất hiện mặt 4 chấm.

b) Tổng số chấm của hai lần gieo lớn hơn 9 nếu lần gieo đầu xuất hiện mặt 4 chấm.

c) Tổng số chấm của hai lần gieo là 10 và số chấm của 2 lần gieo khác nhau.

d) Tổng số chấm của hai lần gieo đầu là 10 nếu số chấm của 2 lần gieo khác nhau.

95. Từ một hộp chứa 5 quả cầu đỏ, 3 quả cầu đen lấy ngẫu nhiên 1 quả (các quả cầu là như nhau). Xem màu của nó rồi hoàn trả lại hộp và bổ sung thêm 3 quả (2 quả cùng màu với quả lấy ra và 1 quả khác màu). Sau khi xáo trộn kĩ lại lấy ngẫu nhiên ra 1 quả. Tính xác suất sao cho quả lấy ra lần thứ hai là đỏ nếu :

a) Quả lấy lần đầu là đỏ.

b) Quả lấy lần đầu là đen.

96. Hai xạ thủ độc lập nhau cùng bắn vào bia. Xác suất bắn trúng bởi một viên của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{7}$. Tính xác suất của các biến cố sau :

A : "Người thứ nhất bắn trượt"

B : "Cả hai cùng bắn trúng"

C : "Cả hai cùng bắn trượt"

D : "Có ít nhất một người bắn trúng"

E : "Có đúng một người bắn trúng"

97. Từ một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con, lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại từng con cho đến khi lần đầu tiên lấy được con K thì dừng. Tính xác suất sao cho :

a) Quá trình lấy dừng lại ở lần thứ ba.

b) Quá trình lấy dừng lại sau không quá 3 lần.

c) Kết quả sẽ như thế nào nếu quá trình lấy có hoàn lại.

98. Có 2 hộp. Hộp thứ nhất có 5 bi đen, 3 bi trắng. Hộp thứ hai có 8 bi đen, 10 bi trắng. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 viên bi. Tính xác suất sao cho :

a) Rút được 2 viên bi đen.

b) Rút được 2 viên bi cùng màu.

c) Rút được 2 viên bi khác màu.

99. Có 2 cái hộp. Hộp thứ nhất chứa 3 quả cầu trắng, 5 quả cầu đen. Hộp thứ hai chứa 2 quả trắng và 3 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên 1 quả. Gọi X là tổng số quả đen lấy được.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Tính kì vọng và phương sai của X.

100. Hai xạ thủ độc lập nhau cùng bắn vào 1 bia. Xác suất bắn trúng bia bởi 1 viên của xạ thủ thứ nhất, thứ hai lần lượt là 0,6 và 0,7

a) Tính kì vọng phương sai và độ lệch chuẩn của số viên trúng bia.

b) So sánh những đặc trưng nói trên với trường hợp hai xạ thủ có xác suất bắn trúng là 0,5 và 0,3 và bình luận.

101. Một mẫu gồm các chiều cao (đơn vị : cm) của 30 học sinh chọn từ lớp 11 của một trường là :

155	160	155	164	160	157	168	164	170	157
157	168	160	157	160	164	170	155	168	157
160	164	157	160	168	157	160	157	164	160

Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ 30 học sinh trên. Kí hiệu X là chiều cao của học sinh đó.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Tính kì vọng và phương sai của X.

102. *Sư tử và Hổ*. Người ta muốn dẫn ra sân khấu theo hàng dọc 5 con sư tử và 4 con hổ với điều kiện 2 con hổ không thể đi liền nhau.

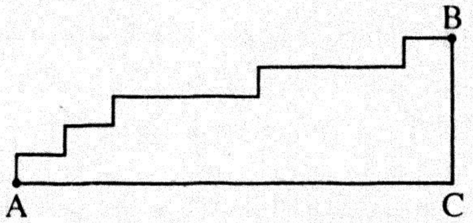
a) Có bao nhiêu cách sắp hàng các con thú dữ đó ?

b) Tổng quát hoá và nêu điều kiện giải được bài toán ?

103. Xây cầu thang

Người ta cần xây một cầu thang từ vị trí A đến vị trí B (Hình 1)

Khoảng cách AC bằng 4,5 mét, khoảng cách CB bằng 1,5 mét. Chiều cao mỗi bậc thang là 30cm, chiều rộng là bội của 50cm.



Hình 1

a) Có bao nhiêu phương pháp xây ?

b) Tổng quát hoá bài toán ?

3. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

1. Phương pháp quy nạp

104. Thế nào là phương pháp quy nạp, cho ví dụ.

105. Chứng minh rằng $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $(n \in \mathbb{N})$.

106. Chứng minh rằng $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$, $(n \in \mathbb{N})$.

107. Chứng minh rằng $T_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $(n \in \mathbb{N})$.

108. Cho các dãy số $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n-1}^{\infty}$ thoả mãn các điều kiện

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n \; ; \; y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n \; (\forall n \geq 1) \text{ và } x_1^2 = y_1 + 2.$$

Chứng minh rằng $x_n^2 = y_n + 2 \; \forall n \geq 1$.

109. Giả sử S là tổng của tất cả các ước số lẻ lớn nhất của các số tự nhiên từ 1 đến 2^n. Chứng minh rằng $3S = 4^n + 2$.

2. Dãy số. Cấp số cộng

110. Thế nào là dãy số, cho ví dụ.

111. Thế nào là dãy số tăng ? dãy số giảm ? Cho ví dụ.

112. Thế nào là dãy số bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn ? Cho ví dụ.

113. Dãy số như thế nào được gọi là một cấp số cộng.

114. Nêu tính chất của cấp số cộng.

115. Nêu công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng.

116. Viết công thức tổng n số hạng đầu của cấp số cộng.

117. Cho biết $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tổng $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1)$ bằng

A. $\frac{n(n+1)}{3}$; B. $\frac{n(n+1)^2}{3}$; C. $\frac{n(n-1)^2(n+2)}{3}$;

D. $\frac{n(n+1)(n-2)}{3}$; E. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

118. Dãy Fibônasi là dãy vô hạn xác định bởi

$$U_1 = U_2 = 1,\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2}\ (n = 3, 4, ...)$$

Vậy U_{10} bằng :

A. 50 ; B. 40 ; C. 55 ; D. 51 ; E. 48.

119. Cho một cấp số cộng có số hạng đầu là 2, số hạng cuối là 29 và tổng của các số hạng là 155. Cộng sai của cấp số cộng là :

A. 3 ; B. 2 ; C. $\frac{27}{19}$; D. $\frac{13}{9}$; E. $\frac{23}{38}$.

120. Cho m là diện tích của hình thang, trong đó đáy nhỏ, đường cao, đáy lớn theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Thế thì :

A. m phải là số nguyên ; B. m phải là số vô tỉ ;

C. m phải là số hữu tỉ ; D. m phải là số nguyên hay số hữu tỉ ;

E. Các phương án trên đều sai.

121. Cho cấp số cộng $U_3 + U_5 = 14$, $S_{12} = 129$, $U_n = 23{,}5$. Thế thì n bằng :

A. 15 ; B. 11 ; C. 12 ; D. 30 ; E. 20.

122. Cho cấp số cộng với $\begin{cases} U_6 = 11 \\ U_8 = 15 \end{cases}$. Thế thì số hạng đầu tiên (U_1) bằng :

A. 1 ; B. 2 ; C. –1 ; D. –2 ; E. 3

123. Cho S_n và T_n theo thứ tự là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng thứ nhất và cấp số cộng thứ hai.

Nếu $S_n : T_n = (7n + 1) : (4n + 27)$ với mọi n. Thế thì tỉ số của số hạng thứ 11 của cấp số cộng thứ nhất và cấp số cộng thứ hai là :

A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{7}{4}$; C. $\frac{4}{3}$; D. $\frac{78}{71}$; E. Đáp số khác.

124. Với mỗi n tổng S_n của n số hạng của một cấp số cộng là $3n^2 + 2n$. Vậy số hạng thứ r là :

A. $3r^2$; B. $6r - 1$; C. $3r^2 + 2r$; D. $6r + 2$; E. $5r + 5$.

125. Cho cấp số cộng với $\begin{cases} U_2 + U_6 = 16 \\ U_2.U_6 = 48 \end{cases}$ và $d > 0$.

Vậy S_8 bằng

A. 56 ; B. 72 ; C. $\frac{105}{2}$; D. $\frac{79}{2}$; E. 48.

126. Tính các tổng sau :

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

127. Tìm cấp số cộng với :

a) $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 27 \\ u_7 - u_2 + u_3 = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_1 = 2 \\ \dfrac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{u_5 + u_6 + u_7 + u_8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 3006

Tìm cấp số cộng (CSC) biết :

128. a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_5 = \dfrac{1}{4}(S_{10} - S_5) \end{cases}$; b) $\begin{cases} S_5 - S_2 - u_5 = 0,1 \\ S_4 + u_7 = 0,1 \end{cases}$.

129. a) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2u_3 = 54 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{u_5}{u_3} = 4 \\ u_2.u_6 = -11 \end{cases}$.

130. a) $\begin{cases} u_3^2 + u_7^2 = 122 \\ u_1 + u_7 = 4 \end{cases}$; b) $\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{u_2}{u_4}$.

131. a) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1u_2u_3 = -21 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$.

132. Tìm một số có ba chữ số biết các chữ số theo thứ tự lập thành CSC. Lại biết rằng số phải tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương bằng 48. Hiệu của số phải tìm với 198 là một số, mà các chữ số của nó viết theo thứ tự ngược lại của số phải tìm.

133. Tìm một số có ba chữ số, biết các chữ số theo thứ tự lập thành CSC, và số phải tìm chia hết cho 45.

134. Tìm a để PT cosx = a có các nghiệm lập thành CSC.

135. Tìm c để PT : $x^3 + 3x^2 + 2x + c = 0$ có ba nghiệm lập thành CSC.

136. Giải các PT sau : a) $2 + 5 + 8 + ... + x = 155$.

b) $(x - 1) + (x - 3) + ... + (x - 27) = 70$.

137. Tìm tổng tất cả các số có hai chữ số, không chia hết cho 3 và cho 5.

138. Tìm CSC biết tổng bốn số hạng đầu bằng 68, tổng bốn số hạng sau cùng bằng –36, tổng tất cả các số hạng bằng 68.

139. Tổng n số hạng đầu của CSC bằng nửa tổng n số hạng tiếp theo. Tìm tỉ số của tổng 3n số hạng đầu với tổng n số hạng đầu của CSC đó.

140. Tìm số các số hạng của CSC biết :

a) $u_3 + u_5 = 14$; $S_{12} = 129$; $u_n = 23,5$.

b) $S_n = 103 + u_2$; $S_n - u_n = 88$; $S_n - (u_2 + u_{n-1}) = 87,5$.

c) Tỉ số của tổng 13 số hạng đầu với 13 số hạng sau cùng bằng $\dfrac{1}{2}$. Tỉ số của tổng tất cả các số hạng (trừ ba số hạng đầu) với tổng số tất cả các số hạng (trừ ba số hạng sau cùng) bằng $\dfrac{4}{3}$.

141. Tìm cấp số cộng biết:

$$\begin{cases} U_2 - U_6 + U_4 & = -7 \\ U_8 - U_7 & = 2U_2 \end{cases}$$

142. Tìm các số hạng của cấp số cộng biết rằng tổng của ba số hạng đầu, tổng của 4 số hạng đầu, tổng n số hạng đầu theo thứ tự là 9 ; 16 ; 100.

143. Cho cấp số cộng $\div\ U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$. Chứng minh:

$$S = \frac{1}{U_1U_2} + \frac{1}{U_2U_3} + \frac{1}{U_3U_4} + \ldots + \frac{1}{U_{n-1}U_n} = \frac{n-1}{U_1U_n}$$

144. a) Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm lập thành các cấp số cộng : $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$.

b) Chứng minh rằng nếu các cạnh của ΔABC theo thứ tự $a < b < c$ lập thành cấp số cộng thì ta có : $ac = 6Rr$ (r, R là bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp ΔABC).

c) Các cạnh a, b, c của ΔABC theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh :

$$d = \frac{3}{2}r\left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)$$

(d là công sai của CSC, r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC).

145. Trong ΔABC, nếu có :

a) $\div\ \tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ thì có $\div\ \cos A, \cos B, \cos C$.

b) $\div\ \cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ thì có $\div$ a, b, c.

146. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để a, b, c lập thành cấp số cộng là $\tan\frac{A}{2} . \tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

147. a) $\sin A \sin B = 3\sin^2\frac{C}{2}$ thì có $\div$ a, c, b.

b) $\div\ \sin(B + C - A), \sin(C + A - B), \sin(A + B - C)$ thì có :
$\div\ \tan A, \tan B, \tan C$.

148. Hãy chứng minh : Trong ΔABC nếu cotA, cot B, cotC theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng lập thành cấp số cộng.

(Trích đề thi ĐH Thương mại – 2001).

149. Tìm sự liên hệ giữa a, b, c để phương trình :
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng.

150. Xác định m để phương trình $x^3 + mx^2 - x - m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

151. Cho $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ và các số cotA, cotB, cotC theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức cotA. cotC.

(Trích đề thi vào ĐH Hàng hải, 2001).

152. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases} \qquad (1)$$

Tìm m để hệ có ba nghiệm $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$; $(x_3 ; y_3)$ với x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng và trong ba số đó có hai số có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1.

3. Cấp số nhân (CSN) kí hiệu ∺

153. Thế nào là một cấp số nhân, cho ví dụ.

154. 1) Nêu tính chất của cấp số nhân, cho ví dụ.

2) Nêu công thức tổng quát của CSN và tổng n số hạng đầu của cấp số nhân, cho ví dụ.

155. Tổng ba số hạng đầu của CSN (các số hạng đều dương) bằng 21. Số hạng thứ ba lớn hơn số hạng đầu là 9. Hỏi CSN đó có bao nhiêu số hạng để tổng của nó bằng 189 ?

156. Tìm CSN biết :

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = -65 \\ u_1 + u_7 = -325 \end{cases}$;   b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 35 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 525 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} S_3 = 13 \\ u_1 u_2 u_3 = 27 \end{cases}$.

157. Tìm số các số hạng của CSN biết :

a) $\begin{cases} u_7 - u_4 = -216 \\ u_5 - u_4 = -72 \\ S_n = 1023 \end{cases}$.   b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 16 \\ S_n - q = 29 \end{cases}$ và các số hạng đều dương.

158. Tìm các số hạng của CSN biết tỉ số của tổng 11 số hạng đầu với tổng 11 số hạng sau cùng, bằng $\frac{1}{8}$; tỉ số của tổng tất cả các số hạng (trừ 9 số hạng đầu), với tổng tất cả các số hạng (trừ 9 số hạng cuối) bằng 2.

159. Tìm một số nguyên tố có ba chữ số, theo thứ tự đó lập thành CSN.

160. Tìm tổng 5 số hạng đầu của CSN tiến biết tổng ba số hạng đầu bằng 13, còn tích của chúng bằng 27.

161. ΔABC có ∺ A, B, C, công bội 2. Chứng minh :

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

162. Ba số có tổng bằng 21 lập thành CSC. Nếu số hạng thứ hai bớt đi 1, thêm 1 vào số hạng thứ ba thì ta được ba số theo thứ tự đó lập thành CSN. Tìm CSC.

163. Ba số có tổng bằng 28 lập thành CSN. Nếu số thứ nhất giảm đi 4 thì ta được ba số theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm CSN.

164. Ba số hạng đầu của một CSC bằng 12. Nếu số thứ ba thêm 2 ta được CSN. Tìm CSC.

165. Tìm bốn số nguyên, biết ba số hạng đầu lập thành CSC, ba số hạng sau lập thành CSN, tổng hai số hạng đầu và cuối bằng 14, tổng hai số hạng giữa bằng 12.

166. Tìm ba số dương biết chúng lập thành CSC và số thứ ba bằng 5 lần số thứ nhất. Nếu thêm 8 vào số hạng thứ ba thì được ba số theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

167. Tìm x biết $\sin x$, $\sin\frac{3x}{2}$, $\sin 3x$ theo thứ tự lập thành CSN.

168. a) Tìm a để PT : $x^3 + x^2 + 2x + a = 0$ có các nghiệm lập thành CSN.

b) Các nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ là các nghiệm của PT :
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ theo thứ tự đó lập thành CSN. Chứng minh $b^3 = ca^3$.

169. PT : $x^2 - 3x + m = 0$ có nghiệm x_1, x_2.

PT : $x^2 - 12x + n = 0$ có nghiệm x_3, x_4.

Tìm m, n biết : ∺ x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$.

170. Giải các PT :

a) $1 + a + a^2 + \ldots + a^x = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)$ với $0 < a \neq 1$.

b) $4 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^x = 2\frac{5}{8}$.

171. Tìm số hạng thứ m và số hạng thứ n của một CSN biết số hạng thứ $(m + n)$ bằng A, số hạng thứ $(m - n)$ bằng B và các số hạng đều dương.

172. Cho S_n là tổng n số hạng đầu của CSN ($S_n \neq 0$, $q \neq 0$, $q \neq 1$). Chứng minh :

$$\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}.$$

173. Tìm ba số nguyên dương có tổng bằng 30 lập thành CSC. Biết rằng : Nếu số hạng đầu bớt đi 5, số hạng thứ hai bớt đi 4, thì theo thứ tự đó chúng là ba số hạng liên tiếp CSN.

174. Tìm ba số nguyên dương có tổng bằng 65 lập thành CSN. Biết rằng : Nếu số nhỏ nhất bớt đi 1, số lớn nhất bớt đi 19 thì theo thứ tự đó chúng lập thành CSC.

175. Tìm bốn số nguyên dương lập thành CSC. Biết rằng : Nếu bớt 2 ở số hạng đầu, 6 ở số hạng thứ hai, 7 ở số hạng thứ ba, 2 ở số hạng thứ tư, thì được bốn số hạng liên tiếp của CSN.

176. Tìm bốn số nguyên dương lập thành CSN. Nếu bớt 2 ở số hạng đầu, 1 ở số hạng thứ hai, 7 ở số hạng thứ ba, 2 ở số hạng thứ tư thì được bốn số hạng liên tiếp của CSC.

177. Tìm ba số hạng đầu của CSN có tổng bằng 42. Biết rằng ba số đó theo thứ tự là : số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ sáu của CSC.

178. Ba số có tổng bằng 51 là ba số hạng liên tiếp của một CSC tiến. Nếu bớt 1 ở số hạng đầu, 7 ở số hạng thứ hai, 8 ở số hạng thứ ba thì được ba số hạng liên tiếp của CSN. Hỏi CSC đó có bao nhiêu số hạng để tổng của chúng bằng 555 ?

179. Ba số có tổng bằng 217 là ba số hạng liên tiếp của CSN. Theo thứ tự đó, chúng cũng là số hạng thứ hai, thứ chín, thứ bốn mươi bốn của một CSC. Hỏi CSC đó có bao nhiêu số hạng để tổng của chúng bằng 820 ?

180. Tìm bốn số nguyên, mà theo thứ tự : ba số đầu lập thành CSC, ba số sau lập thành CSN, tổng hai số hạng đầu và cuối bằng 37, tổng hai số hạng giữa bằng 36.

181. Tìm bốn số nguyên, mà theo thứ tự : ba số đầu lập thành CSN, ba số sau lập thành CSC, tổng hai số hạng đầu và cuối bằng 14, tổng hai số hạng giữa bằng 12.

182. Tìm ba số dương lập thành CSN, biết rằng nếu thêm 4 vào số hạng thứ hai thì được CSC. Lại thêm 32 vào số hạng thứ ba thì được CSN.

183. Các số dương a, b, c là các số hạng thứ m, n, p của một CSC và CSN. Chứng minh :

$$a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b} = 1.$$

184. Tìm một số có ba chữ số thoả mãn các điều kiện sau :

a) Các chữ số theo thứ tự đó lập thành CSN.

b) Nếu thêm 1 ; 2 ; 1 theo thứ tự vào các chữ số trên thì được CSC.

c) Nếu đem số phải tìm trừ đi 594 thì nhận được một số có ba chữ số viết theo thứ tự ngược lại của số phải tìm.

185. Hãy xác định a, b sao cho 1, a, b là một cấp số cộng và dãy 1, a^2, b^2 lập thành cấp số nhân.

186. Chứng minh rằng nếu $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$ thì a, b, c lập thành cấp số nhân.

4. GIỚI HẠN

1. Giới hạn của dãy số

187. a) Nêu định nghĩa giới hạn của dãy số $\{U_n\}$.

b) Nêu định nghĩa giới hạn vô cực của dãy số $\{U_n\}$.

c) Nêu định nghĩa giới hạn $\frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$ hoặc khi $n \to 0$.

188. Phát biểu điều kiện cần và đủ để dãy số $\{U_n\}$ có giới hạn.

189. Phát biểu các định lí về giới hạn.

190. Cho dãy số $\left\{U_n\right\} = \frac{1}{n(n+1)}$

Thiết lập dãy số $\{S_n\}$ mà $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Tìm các giới hạn sau:

191. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 7n + 1}{9n^2 + n + 3}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)(3n-2)}{(2n+1)^3}$.

192. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^3 - n + 3} - n^2\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt{n^2+1} - 1}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{n^3 + n + 3} - 2\sqrt{n^2 - 1}}{3n + 2}$.

193. a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2}\right)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n\right)$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n - n^3} + n\right)$.

194. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt[5]{n^5 + 1}}{n4^n}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

195. a) Lập công thức tổng của cấp số nhân vô hạn có công bội q ($|q| < 1$).

b) Tìm số e.

196. Giả sử $|p| < 1$, $|q| < 1$. Biết rằng :

$S = 1 + p + p^2 + ... + p^n + ...$

$T = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$

a) Hãy tính p theo S và q theo T.

b) Tính theo S, T tổng $1 + pq + p^2q^2 + ... + p^nq^n + ...$

197. Một hình vuông có độ dài bằng 1. Trong hình vuông vẽ nội tiếp hình tròn. Trong hình tròn vẽ nội tiếp một hình vuông. Sau đó, trong hình vuông vẽ nội tiếp một hình tròn ; cứ thế mãi. Hãy tính :

a) Chu vi tất cả các hình vuông. b) Diện tích tất cả các hình vuông.

c) Chu vi tất cả các hình tròn. d) Diện tích tất cả các hình tròn.

198. Khoảng cách giữa một xe máy và một người đi bộ là 1 km. Vận tốc xe máy gấp 10 lần vận tốc người đi bộ. Hỏi xe máy cần vượt một quãng đường dài bao nhiêu để đuổi kịp người đi bộ ?

2. Giới hạn của hàm số

199. Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng K, có thể trừ ở điểm $x_o \in K$. Khi nào nói hàm số có giới hạn L khi x dần tới x_o.

200. Hãy giới thiệu khái niệm giới hạn của hàm số ở vô cực và giới hạn vô cực của hàm số.

201. Hãy giới thiệu một số định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số.

202. 1) Cho biết giới hạn một bên của hàm số f(x) khi x dần đến x_o về phía bên phải, về phía bên trái.

2) Nêu một số quy tắc tìm giới hạn vô cực.

203. Nêu các dạng giới hạn vô định, nêu phương pháp giải và cho ví dụ. Tìm giới hạn.

204. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$. b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$. c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$.

205. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$. b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$.

206. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(4x-1)^3}$. b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3-1)(x+4)}{(3x^2+1)(5x+3)}$.

207. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(3x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)$.

208. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]$. b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

209. Tìm giới hạn : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

(Trích đề thi ĐH Quốc gia Hà Nội, 1997, khối A).

210. Tính giới hạn :

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1}$$

(Trích đề thi ĐH Đà Nẵng – 1999)

211. Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan 2x.\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.   b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

(Trích đề thi ĐH Sư phạm 2 – A – 2000)

3. Hàm số liên tục

212. Khi nào hàm số f(x) được gọi là liên tục tại điểm x_o.

213. Khi nào hàm số f(x) được gọi là liên tục trên khoảng (a ; b).

214. Khi nào hàm số f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a ; b].

215. Cho biết tính liên tục của các hàm số đã học.

216. Giới thiệu định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục.

217. Xét tính liên tục của hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 7 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

218. Tìm a để hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại x = 0.

219. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

220. Xét tính liên tục của các hàm sau, tại điểm đã chỉ ra :

a) $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ x^2 & \text{nếu } 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 4 & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$

b) $y = f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{nếu } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$

c) $y = f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{|x|} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

221. Tìm a và b để hàm sau liên tục trên R :

$$y = f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{nếu } x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{nếu } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{nếu } x \ge -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

222. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm :

a) $x^5 + 7x^4 - 3x^2 + x + 2 = 0$.   b) $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

223. Tìm các khoảng và nửa khoảng ở đó hàm sau đây liên tục :

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ \cos x & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$$

224. Hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$ không được xác định tại x = 0. Cần xác định f(0) như thế nào để được một hàm số f(x) xác định và liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$?

225. Vì sao không thể xác định được f(0) đối với hàm số

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $(x \ne 0)$ để được hàm số f(x) xác định và liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

226. Hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ chỉ được xác định trên đoạn $[-1 ; 1]$.

Hãy chỉ ra cách xác định f(x) trên $\mathbb{R} \setminus [-1 ; 1]$ để được hàm số xác định và liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì 2, tức là thoả mãn điều kiện $f(x + 2) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

5. ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm và ý nghĩa của đạo hàm

227. Định nghĩa đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_o.

228. Giới thiệu cách tìm đạo hàm của hàm số tại một điểm.

229. Giới thiệu định nghĩa đạo hàm của hàm số trên khoảng J.

230. Nêu các công thức tính đạo hàm của các hàm số thường gặp.

231. Nêu ý nghĩa vật lí và ý nghĩa hình học của đạo hàm. Cho ví dụ.

232. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau đây tại điểm x_o đã chỉ ra :

a) $y = 3x - 1$ tại $x_o = 1$. b) $y = 2x^2 + 3x$ tại $x_o = 2$.

c) $y = 2\sqrt{x}$ tại $x_o = 1$.

233. Cho hàm số $y = \frac{x}{1+|x|}$. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số tại $x_o = 0$.

234. Bằng định nghĩa của đạo hàm, tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = 2x - 1$. c) $y = x^3$. e) $y = \frac{3}{x}$.

b) $y = -x^2 + x$. d) $y = \sqrt{2x}$. f) $y = \frac{1}{x-1}$.

235. Gọi P là parabol đồ thị của hàm số $y = x^2 + 1$.

a) Tìm hệ số góc các tiếp tuyến của P tại các tiếp điểm có hoành độ $x = 2$, $x = 3$.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến ấy.

236. Tại tiếp điểm nào thì tiếp tuyến của parabol P trong bài tập 235 :

a) song song với đường thẳng $y = -5x + 1$?

b) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3} - 2$?

237. Phương trình chuyển động thẳng của một chất điểm là :

$s = s(t) = t^2 - t$.

a) Tìm công thức biểu thị vận tốc của chất điểm ở một thời điểm t bất kì.

b) Tìm vận tốc của chất điểm ở các thời điểm t = 1sec, t = 3sec.

c) Ở thời điểm nào thì vận tốc của chất điểm bằng 0 ?

2. Các quy tắc tính đạo hàm

238. Phát biểu và chứng minh đạo hàm của tổng và hiệu các hàm số. Cho ví dụ.

239. Phát biểu và chứng minh đạo hàm của tích các hàm số và cho ví dụ.

240. Phát biểu và chứng minh đạo hàm của thương hai hàm số và cho ví dụ.

241. Thế nào là hàm số hợp.

242. Phát biểu đạo hàm của hàm số hợp và cho ví dụ.

243. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = 5 + 3x - x^2$, tại $x_o = 1$.

b) $y = x^4 - 5x^2 + x$, tại $x_o = 2$.

244. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + 4$. b) $y = 5a^2x^4 - 4ax^3 + 3a^3x - 5a^7$.

c) $y = \frac{1}{a}x^3 + \frac{2}{a^2}x^2 - \frac{3}{a^3}x$.

245. Tìm đạo hàm các hàm số :

a) $y = 3x^3(2x - 3)$. b) $y = \frac{ax + b}{a + b}$ $(a + b \neq 0)$.

c) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

246. Tìm đạo hàm các hàm số :

a) $y = (x^5 + 2x^2)^3$. b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$.

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$. d) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$.

247. Tìm đạo hàm các hàm số :

a) $y = \sqrt{1 + 3x}$. b) $y = x^3\sqrt{x^3 + 2}$. c) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

248. Tìm đạo hàm các hàm số :

a) $y = (1 + 3\sqrt{x})^5$. b) $y = x^3 - x - (x^3 - x)^2$.

249. Cho hàm số $y = \frac{a + u}{a - u}$, $u = \frac{b + x}{b - x}$. Tìm y'(x)

250. Cho $y = 2x^3 - 6x^2 + 4$. Tìm x để

a) $y' > 0$. b) $y' > 3$.

251. Cho $y = x(x - 1)(x - 2)\ldots(x - 2006)$. Tính y'(0).

252. Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$ bằng :

A) $2x + 1$. B) x^2. C) 4. D) $3x$. E) $5x$.

253. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$ thì f'(0) bằng

A) $-\frac{1}{3}$. B) $2x$. C) $\frac{1}{4}$. D = 2. E) $x + 1$.

254. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^3$ (m, n là hằng số) bằng :

A) 3. B) 4 . C) $-\frac{6n}{x^3}\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2$.

D) $\frac{6m}{x^2}\left(m+\frac{n}{x^2}\right)^2$.		E) Đáp số khác.

255. Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x$ dương khi :

A) $x > 0$.		B) $x < 0$.	C) > 1.	D) $x < 1$.	E) $\forall x \in \mathbb{R}$.

256. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$, $f'(x) = 0$ khi :

A) $x = 1$.		B) $x = 5$.		C) $x = -1, x = -2$.

D) $x = 1, x = 2$.		E) $x = 0, x = 1$.

257. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = (x^2 - 1)^2$ tại điểm có hoành độ $x_o = 2$ là :

A) $y = 4x + 5$.		B) $y = 3x + 7$.

C) $y = 8x - 7$.		D) $y = 24x - 39$.		E) $y = 6x + 3$.

258. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$ ($g = 9{,}8$ m/s^2 thời gian t được tính bằng gây (s)). Vận tốc của chuyển động ở thời điểm $t = 3$ giây là :

A) 27 m/s.		B) 28 m/s.		C) 29,4 m/s.

D) 26 m/s.		E) 28,4 m/s.

259. Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \le x_o \\ ax + b & \text{với } x > x_o \end{cases}$$

Tìm a và b để hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại điểm $x = x_o$.

260. Hàm số $y = |x - 97|$ có đạo hàm tại $x = 97$ không ? Tại sao.

261. Cho $f(x) = (x^{48} + x^{47} + ... + x + 1)^2$. Tính $(f'(x))'$.

3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác

262. Tìm giới hạn của biểu thức $\frac{\sin x}{x}$ khi $x \to 0$.

263. Nêu các công thức đạo hàm của các hàm số y = sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx và các hàm số hợp y = sinu, y = cosu, y = tanu, y = cotu.

264. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ $(mn \ne 0)$.		b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{3x}$.

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{\sin x}{x}$.		d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

265. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}$. b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$. c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

Tính đạo hàm các hàm số sau đây :

266. a) $y = \sin 3x - \cos 3x$. b) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

c) $y = \sin^3 2x$. d) $y=\cos\dfrac{1}{x}$.

267. a) $y=\dfrac{1+\tan x}{\sin x}$. b) $y = \cos^2 x \cot x$.

c) $y = \sin x \tan^2 x$. d) $y = \tan x + \cot x$.

268. a) $y = x\cot x$. b) $y=\dfrac{\sin 2x}{2x}+\dfrac{2x}{\sin 2x}$.

c) $y=\sin\dfrac{x+1}{2}$. d) $y=\dfrac{3x\sin 3x}{3+\tan 3x}$.

269. a) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$. b) $y=\tan\sqrt{1+x^2}$.

c) $y=\sin^2(\cos 2x)$. d) $y=\cos^2(\sin 2x)$.

270. Cho $f(x) = x^3$ và $g(x) = 4x^2 + \cos\pi x$.

Tính $\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$.

271. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f'(x)$ biết $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$

272. Chứng minh rằng $(\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x)' = 0$

273. Giải phương trình : $f'(x) = 0$ biết $f(x) = 3\sin x + 4\cos x + 5x$

4. Vi phân – Đạo hàm cấp cao

274. Trình bày vi phân của hàm số $y = f(x)$; Nêu công thức tính gần đúng (dạng vi phân).

275. Định nghĩa đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$.

276. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \cos 2x$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{4}$ ứng với $\Delta x = 0{,}001$.

277. Tính vi phân của các hàm số

a) $y=\dfrac{x}{1+x}$. b) $y = x\cos x$.

c) $y = \cos^2 x + x^2$. d) $y = \cot^2 x$.

278. Tính đạo hàm cấp ba của các hàm số :

a) $y = (3x + 1)^5$; b) $y = \cos^3 x$. c) $y = \sin 3x$.

279. a) $y = \dfrac{a}{x^n}$. Tính y''. b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Tính y''.

280. Các hàm số f(x), g(x) có đạo hàm cấp ba $f^{(3)}$ và $g^{(3)}$. Chứng minh :

a) $(f.g)'' = f''.g + 2f'g' + fg''$.

b) $(f.g)^{(3)} = f^{(3)}.g + 3f''g' + 3f'.g'' + f.g^{(3)}$.

281. Cho hàm số y = Acosx + Bsinx. Chứng tỏ rằng $y' + y^{(3)} = 0$.

282. Cho $y = \sqrt{ax + b} + c$ (a, b, c là hằng số). Chứng minh rằng:

$$3.\, y''^2 = y'.\, y^{(3)}.$$

283. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$. Chứng minh : $y'' + y = 3y^5$.

284. Cho hàm số $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^n$. Chứng minh rằng :

$(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2 y = 0$.

285. Cho y = f(x) và $U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f'(x)}}$, $V(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$.

Chứng minh $\dfrac{u''}{u} = \dfrac{v''}{v}$.

5. Tổng hợp

286. Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x = 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{với } x \neq 0 \end{cases}$$

(Trích đề thi ĐH Giao thông vận tải – 1997)

287. Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

1) Tính đạo hàm của f tại mọi $x \in \mathbf{R}$.

2) Chứng tỏ rằng đạo hàm f' không liên tục tại x = 0.

288. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số y = sin5x tại $x = \dfrac{\pi}{3}$.

289. Cho hàm số:

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{A\sin^2 x}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 4x + B & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$$

a) Xác định A và B để hàm số liên tục tại mọi điểm x.

b) Xác định A và B để hàm số có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x. Chứng minh rằng khi đó $f'(x)$ là một hàm số liên tục tại mọi điểm x.

290. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3x$.

a) Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định mà tất cả các đường cong (C_m) đều đi qua, với mọi m.

b) Chứng minh rằng tại điểm cố định đó tất cả các đường cong (C_m) đều có chung một tiếp tuyến.

291. Hai đường cong (C) và (C') lần lượt là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại $A(x_o ; y_o)$ nếu :

a) A là điểm chung của (C) và (C').

b) (C) và (C') có tiếp tuyến chung tại A.

1) Chứng minh rằng hoành độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$.

2) Chứng tỏ rằng các hàm số $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^3 - 2x + 5$ có đồ thị tiếp xúc nhau tại A(2 ; 9).

292. Tính $f^{(n)}(x)$ biết:

a) $f(x) = \dfrac{1}{ax + b}$. b) $f(x) = \sin ax + \cos bx$.

293. Tính $f^{(n)}(x)$ biết

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. b) $f(x) = \sin 5x$.

294. Tính $f^{(n)}(x)$ biết $f(x) = \sin^2 5x$.

295. Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên đoạn [0 ; 1] có đạo hàm trên khoảng (0 ; 1), nhận giá trị trên đoạn [0 ; 1], ngoài ra $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $a, b \in (0 ; 1)$, $a \neq b$ sao cho $f'(a).f'(b) = 1$.

Một số câu hỏi trắc nghiệm

296. Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 5x\right)$ là:

A) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 5x\right)$. B) $-5\sin 5x$. C) $5\sin 5x$.

D) $-5\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 5x\right)$. E) $5\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 5x\right)$.

297. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$ là :

A) -2.
B) 2.
C) $\dfrac{2}{(1 + \sin x)^2}$.
D) $\dfrac{1 - \sin^2 x + \cos x}{(1 + \sin x)^2}$.
E) $\dfrac{-1}{(1 + \sin x)}$.

298. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x - m}{x + m}$ dương thì m là :

A) $m > 0$.
B) $m < 0$.
C) $m = 1$.
D) $m = -1$.
E) $m = 2$.

299. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$ ($g = 9{,}8$ m/s^2) và t được tính bằng giây (s). Vận tốc của chuyển động ở thời điểm $t = 5$s là :

A) 49.
B) 49 m/s.
C) 50 m/s.
D) 55 m/s.
E) 60 m/s.

300. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x + 2}$ tại điểm $M_o(1\,;\,0)$ là :

A) $y = 3x + 4$;
B) $y = \frac{2}{3}(x - 1)$;
C) $y = 4x - 4$
D) $y = 3x + 2$;
E) $y = x + 1$

6. PHÉP BIẾN HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

1. Một số khái niệm – Tính chất của các phép biến hình

301. Thế nào là phép biến hình.

302. Thế nào là phép dời hình.

303. Nêu định nghĩa các phép biến hình sau :

a) Phép tịnh tiến.
b) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ.
c) Phép quay tâm I góc α.
d) Phép đối xứng tâm O.
e) Phép vị tự tâm I tỉ số k.
g) Phép đồng dạng tỉ số k.

304. Thế nào là hai hình bằng nhau.

305. Thế nào gọi là hai hình đồng dạng.

306. Khi nào hình A gọi là hình có tâm đối xứng.

307. Khi nào hình A gọi là hình có trục đối xứng.

308. Thế nào là tích của hai phép biến hình.

309. Thế nào là phần tử không đổi trong một phép biến hình.

310. Cho biết khái niệm phép biến hình đồng nhất.

311. Nêu tính chất cơ bản của phép dời hình.

312. Nêu tính chất cơ bản của phép đồng dạng.

313. Xét các phần tử không đổi trong các phép biến hình

a) Tịnh tiến.
b) Đối xứng trục.
c) Phép quay tâm I góc α.
d) Phép đối xứng tâm I.
e) Phép vị tự tâm I tỉ số k.

314. Hãy nêu quan hệ giữa các phép biến hình.

2. Phép biến hình

315. Trên mp (P) lấy một đường thẳng (d). Xét một quy tắc tương ứng f sau $f(M) = M'$

* $M \in d$ thì $f(M) = M$.

* $M \notin d$ thì qua M dựng đường thẳng $(\Delta) \perp (d)$, H là giao điểm của (Δ) và (d). Trên Δ lấy M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MH}$. Quy tắc trên có là một phép biến hình không ?

316. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại I. Lấy 2 điểm O và O_1 ngoài 2 đường thẳng đó. Xét quy tắc tương ứng giữa M và M' như sau :

* $M \in a$ thì đường thẳng OM cắt b tại N, đường thẳng O_1N cắt a tại M'. Quy tắc này có phải là một phép biến hình không.

317. Cho đường thẳng a cắt đường thẳng b ở O và một điểm P khác O sao cho PO $\perp$ a. Xét quy tắc tương ứng như sau : Với $M \in b$ ta vẽ đường tròn (OPM) cắt lại a ở C. Vẽ đường tròn tâm C bán kính CM cắt lại b ở M'. Quy tắc này có là phép biến hình không ? Phép biến hình này có gì đặc biệt.

318. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Với mỗi điểm M trên đường tròn ta thể hiện quy tắc tương ứng sau đây : Từ M vẽ MH $\perp$ AB và lấy M' sao cho $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$.

Quy tắc này có được gọi là một phép biến hình không ? Xét trường hợp $k = \frac{1}{2}$; $k = 2$. Vẽ hình trong 2 trường hợp này.

3. Phép tịnh tiến

319. Cho ΔABC. Dựng ảnh của ΔABC qua các phép $T_{\overrightarrow{AB}}$; $T_{\overrightarrow{BC}}$; $T_{\overrightarrow{AC}}$.

320. Phép tịnh tiến nào biến ΔABC thành chính nó.

321. Cho 2 đường thẳng (a) // (b) và 2 điểm A, B nằm ngoài 2 đường thẳng đó. Dựng đường thẳng $MN \perp (a)$ sao cho AM + MN + NB có độ dài nhỏ nhất. ($M \in (a)$, $N \in (b)$).

322. Chứng minh rằng tích của hai phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là phép tịnh tiến theo $\vec{a} + \vec{b}$.

323. Chứng minh rằng hai hình thang có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau đôi một thì hai hình thang ấy bằng nhau.

324. Chứng minh rằng nếu một tứ giác có đoạn thẳng nối trung điểm 2 cạnh đối diện bằng nửa tổng hai cạnh đối còn lại thì tứ giác đó là hình bình hành hoặc hình thang.

325. Chứng minh trong một tam giác, trung tuyến ứng với cạnh ngắn thì lớn hơn trung tuyến ứng với cạnh dài.

326. Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm cùng phía với (d). Tìm 2 điểm trên (d) là M và N

a) Sao cho MN = a cho trước và AM = BN.

b) Sao cho MN = a, AM + MN + NB ngắn nhất.

4. Phép quay Q (I, α)

327. Cho ΔABC và ΔADE là 2 Δ đều cạnh a và b. M là trung điểm BD, N là trung điểm CE. Chứng minh ΔAMN là Δ đều.

328. Về phía ngoài ΔABC dựng các Δ đều AMB, ANC. Chứng minh MC = BN và góc giữa $\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{BN}$ là 60°.

329. Về phía ngoài ΔABC dựng các Δ đều AMB, ANC, BPC. Gọi tâm của các Δ đều đó là M_o, N_o, P_o. Chứng minh $\Delta M_oN_oP_o$ là Δ đều.

330. Hình bình hành MNPQ nội tiếp hình bình hành ABCD ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$, $Q \in DA$). Chứng minh hình bình hành có cùng tâm (giao điểm 2 đường chéo).

331. Cho hình bình hành ABCD. Xét các đường tròn nội tiếp các ΔABC, ACD, ABD, BCD. Chứng minh các điểm tiếp xúc của 4 đường tròn trên với hai đường chéo của hình bình hành là 4 đỉnh của hình bình hành.

332. Cho Δ đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ lấy M. Chứng minh MC = MA + MB.

333. Cho lục giác đều ABCDEF với tâm O. Gọi I là trung điểm OC, K là trung điểm EF. Chứng minh ΔAIK đều.

334. Dựng hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 4 cạnh của hình bình hành.

335. Từ I nằm trong hình vuông ABCD, kẻ 2 đường thẳng vuông góc cắt AB, BC, CD, DA tại các điểm M, P, N, Q. Hãy chứng minh MN = PQ.

5. Phép đối xứng trục

336. Chứng minh trong các tam giác có cùng đáy và cùng diện tích thì Δ cân có chu vi bé nhất.

337. Cho góc xOy và hai điểm cố định A, B. Tìm $M \in Ox$, $N \in Oy$ sao cho AM + MN + NB có giá trị nhỏ nhất.

338. Cho góc xOy và đường thẳng (d) cắt cả 2 cạnh của góc ở 2 điểm. Dựng hình vuông có 2 đỉnh trên Ox, Oy và 2 đỉnh trên (d).

339. Cho góc xOy và 1 điểm M ở trong góc. Tìm $A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho chu vi ΔMAB ngắn nhất.

6. Phép đối xứng tâm

340. Cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Qua A hãy dựng cát tuyến cắt 2 đường tròn tại M và N sao cho AM = AN.

341. Cho đường thẳng d ngoài đường tròn (O) và một điểm A. Dựng qua A một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại M và cắt d tại N sao cho AM = AN.

342. Cho góc xIy và 2 điểm A, B ở phần trong của góc. Dựng hình bình hành có 2 đỉnh A, B đối diện, còn 2 đỉnh kia nằm trên Ix và Iy.

343. Dựng hình ngũ giác ABCDE nếu biết 5 trung điểm của chúng là $M_1M_2M_3M_4M_5$.

7. Phép dời hình

344. Chứng minh rằng tích 2 phép đối xứng trục d và m mà d // m là 1 phép tịnh tiến.

345. Chứng minh rằng tích 2 phép đối xứng trục d và m mà $d \cap m = O$ là một phép quay tâm O.

346. Chứng minh rằng tích 2 phép đối xứng trục d và m mà $d \perp m$ là 1 phép đối xứng tâm.

347. Chứng minh rằng tích 2 phép tịnh tiến là 1 phép tịnh tiến.

348. Chứng minh rằng tích 2 phép quay tâm O_1 và tâm O_2 là 1 phép tịnh tiến.

349. Chứng minh trong ΔABC (không đều) trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O luôn thẳng hàng (đường thẳng Ơle).

350. Chứng minh đường thẳng Ơle đi qua tâm đường tròn 9 điểm (đường tròn Ơle).

351. Cho ΔABC. Dựng hình vuông MNPQ sao cho M và N nằm trên 2 cạnh, P vàQ nằm trên cạnh còn lại.

352. Cho ΔABC. Trên AB tìm M và trên AC tìm N sao cho BM = MN = NC.

353. Dùng phép vị tự, chứng minh định lí Mênêlavýt.

9. Phép đồng dạng

354. Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm M chạy trên (O). Trên tia AM lấy N sao cho MN = MB. Xác định phép đồng dạng biến M thành N. Tìm tập hợp điểm N.

355. Chứng minh hai hình chữ nhật có 2 cạnh kề tỉ lệ với nhau thì đồng dạng.

356. Chứng minh hai hình thoi có 1 góc bằng nhau thì đồng dạng.

357. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và 1 điểm M. Dựng ảnh M' và M trong phép đồng dạng biến $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$.

358. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Xác định phép đồng dạng biến AD thành DC.

10. Tổng hợp

359. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, có trực tâm H và BC cố định. Cho A chạy trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích trực tâm H ? Quỹ tích trọng tâm G ?

360. Cho M là 1 điểm bất kì trong ΔABC. Gọi M_1, M_2, M_3 là điểm đối xứng của M qua trung điểm AB, BC, CA. Chứng minh CM_1, AM_2, BM_3 đồng quy.

361. Cho 3 đường thẳng (D_1), (D_2), (D_3) và đường thẳng (d), cả 4 đều phân biệt. Dựng đường thẳng m // d và cắt D_2 và D_3 ở M, N và trung điểm $MN \in D_1$.

362. Cho 2 đường thẳng cắt nhau (a) và (b) và 2 điểm A và G. Dựng ΔABC có đỉnh A, trọng tâm G và 2 đỉnh B, C nằm trên (a) và (b).

363. Cho ABCD là hình vuông tâm O. Gọi phép quay tâm O góc quay 90^o là Q và phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AD}$ là T.

a) Dựng ảnh của hình vuông ABCD qua phép biến hình $F_1 = T_oQ$ và $F_2 = Q_oT$.

b) $M \in AC$. Hình chiếu của M trên BC, BA, AD, DC là N, P, S, R. Chứng minh đường cao của ΔMPN là đường trung tuyến của ΔMSR.

c) Chứng minh rằng trung trực đoạn PN luôn đi qua 1 điểm cố định khi M chạy trên AC.

7. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN – QUAN HỆ SONG SONG

1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

364. Thế nào là mặt phẳng trong không gian ?

365. Giới thiệu điểm thuộc mặt phẳng.

366. Thế nào là hình biểu diễn. Hãy vẽ hình biểu diễn của hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình tứ diện (hình có 4 mặt đều là tam giác).

367. Nêu một số quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian.

368. Nêu các tính chất thừa nhận của hình học không gian.

369. Nêu 3 cách xác định mặt phẳng.

370. Muốn xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt, ta làm thế nào ?

371. Muốn xác định giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng ta làm thế nào ?

372. Trong ba câu phát biểu sau, câu nào chưa đúng, câu nào đúng ?

a) Ba điểm không thẳng hàng xác định một mặt phẳng.

b) Ba điểm xác định một mặt phẳng.

c) Ba điểm không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.

373. Trong các câu phát biểu sau, câu nào đúng, câu nào chưa đúng ?

a) Một điểm và một đường thẳng xác định một mặt phẳng duy nhất.

b) Một điểm và một đường thẳng không qua nó xác định một mặt phẳng duy nhất.

c) Một đường thẳng và một điểm nằm ngoài nó xác định một mặt phẳng duy nhất.

374. Gọi P là mặt phẳng chứa 3 đỉnh của ΔABC. Trọng tâm G của ΔABC có nằm trong mặt phẳng P không ? Vì sao ?

375. a) Thế nào là hình tứ diện đều.

b) Thế nào là hình chóp.

376. Thế nào là thiết diện của mặt phẳng (α) cắt một hình chóp.

377. Cho tứ diện ABCD. M, N, I theo thứ tự là trung điểm AC, AD, CD.

a) Tìm giao tuyến của mp (ABI) và mp (BMN).

b) Gọi A' là trọng tâm ΔBCD. Tìm giao điểm của AA' và mp (BMN).

378. Tứ diện ABCD có I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AD, BD, AB, CD. Xác định giao điểm O của MN với mp CIK và tính tỉ số $\frac{NO}{MO}$.

379. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, I, K theo thứ tự là trung điểm các cạnh AD, CD, AB. Điểm $N \in BD$ thoả mãn BN = 2ND. Xác định giao điểm O của IK với mp CMN và tính tỉ số $\frac{OI}{KO}$.

380. Cho hình thang ABCD (AD // BC) có AD = 2BC. Một điểm S ở ngoài mp ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm SA, SB. Tìm giao điểm K của SC với mp DMN và tính tỉ số $\frac{SK}{KC}$.

381. Cho tứ diện ABCD. AM, DN theo thứ tự là các đường trung tuyến của các tam giác ACD và ABD. $E \in AM$, $F \in DN$ sao cho EF // BC. Tìm tỉ số $\frac{EF}{BC}$.

382. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'.

a) Tìm giao điểm I, K của đường chéo A'C với mp AB'D' và mp BC'D.

b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng này chia đường chéo A'C thành ba đoạn bằng nhau.

c) Chứng minh I, K theo thứ tự là trọng tâm ΔAB'D' và ΔBC'D.

383. Trên các cạnh AD và BD của tứ diện ABCD lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BD} = m$. Tìm khoảng cách giữa các trọng tâm các tam giác ACN và BMC theo AB = a.

384. Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng bất kì (α) không chứa cạnh AD, cắt cạnh AB, BD, AC, CD theo thứ tự tại M, N, P, Q, biết rằng AD // MN // PQ.

a) Chứng minh các đường thẳng chứa các đoạn thẳng AD, MN, PQ đồng quy.

b) Xác định thiết diện (mặt cắt) do mp (α) cắt tứ diện.

385. Cho tứ diện ABCD, và M ∈ AB, N ∈ AD, P ∈ BC, MN // BD.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng MN với mp BCD.

b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng PI với mp ACD.

c) Tìm giao tuyến của mp MNP với các mặt phẳng : (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).

d) Tìm thiết diện do mp MNP cắt tứ diện ABCD.

386. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' và R ∈ A'D', N ∈ BC, Q ∈ C'D'.

a) Tìm giao điểm I, K của đường thẳng RQ với mp ABB'A' mp BCC'B'.

b) Tìm giao điểm P, J của đường thẳng NK với mp CDD'C' và mp ABB'A'.

c) Tìm giao điểm S, M của đường thẳng IJ với mp ADD'A' và mp ABCD.

d) Tìm giao tuyến của mp NQR với các mặt của hình lập phương.

e) Tìm thiết diện do mp NQR cắt hình lập phương.

387. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D', và M ∈ AB, N ∈ BC, Q ∈ DD'. Xác định thiết diện do mp MNQ cắt hình lập phương.

388. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D', cạnh a, và N, P, Q theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CC', C'D'. Tìm diện tích thiết diện do mp NPQ cắt hình lập phương.

389. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D', cạnh a. Kéo dài các cạnh : AD (về phía A) một đoạn AJ = $\frac{3}{2}$a, DC (về phía C) một đoạn CK = $\frac{3}{2}$a ; DD' (về phía D') một đoạn D'I = $\frac{3}{2}$a. Tìm diện tích thiết diện do mp IJK cắt hình lập phương.

390. Cho tứ diện ABCD. Cho B' $\in$ AB, C' $\in$ AC, D' $\in$AD.B'C, BD', C'D' cắt mp BCD theo thứ tự tại I, J, K. Xác định các giao điểm I, J, K và chứng minh I, J, K thẳng hàng.

391. Cho góc nhọn $\widehat{xOy} \subset$ mp P, A, B $\notin$ P, đường thẳng AB, cắt P. Mp Q quay quanh AB, cắt Ox, Oy ở E và F.

1) Chứng minh khi mp Q quay quanh AB, đường thẳng EF luôn luôn đi qua một điểm cố định.

2) FA $\cap$ BE = M, FB $\cap$ EA = N. Tìm tập M, N khi mp Q quay.

3) Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định khi mp Q quay.

4) Xác định vị trí của mp Q để ΔFEO cân đỉnh O.

2. Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song

392. Cho biết vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian.

393. Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D', hãy tìm những đường thẳng :

a) Song song với BC.

b) Chéo nhau với BC.

394. Chứng minh định lí 1 : "Trong không gian qua điểm M không nằm trên đường thẳng d cho trước có một và chỉ một đường thẳng song song với d".

395. Phát biểu định lí 2, về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả.

396. Chứng minh định lí 3 : "Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau".

397. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Lấy M $\in$ AA', N $\in$ CC', P $\in$ BB', Q $\in$ DD'. Làm thế nào để biết được rằng bốn điểm M, N, P, Q có cùng thuộc một mặt phẳng hay không ?

398. Cho tứ giác lồi ABCD và S $\notin$ mp ABCD. Lấy M $\in$ SA, N $\in$ SC, P $\in$ SB, Q $\in$ SD. Làm thế nào để biết được rằng bốn điểm M, N, P, Q có cùng thuộc một mặt phẳng hay không ?

399. Cho tứ diện ABCD. M, N là trung điểm của BC và BD. Mặt phẳng P quay quanh MN cắt AC, AD theo thứ tự tại J, I.

a) Thiết diện do mặt phẳng P cắt tứ diện là hình gì ? Xét các trường hợp có thể xảy ra.

b) MJ cắt NI tại K. Tìm tập điểm K.

c) MI cắt NJ tại L. Tìm tập điểm L.

400. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Lấy M $\in$ AB, P $\in$ CD sao cho AM = DP = $\frac{1}{3}$a. Tìm diện tích thiết diện qua MP và song song với AC.

401. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. M, N theo thứ tự là trung điểm AD, BB', I là tâm đáy trên của hình lập phương. Đường thẳng qua I song song MN, cắt mặt phẳng (AA'D'D) tại K. Tìm độ dài IK biết MN = a.

402. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Lấy $M \in AA'$ sao cho $\frac{AM}{AA'} = m$, $N \in CC'$ sao cho $\frac{CN}{CC'} = n$. Mặt phẳng chứa MN song song BD chia BB' theo tỉ số nào ?

3. Đường thẳng và mặt phẳng song song

403. Cho biết vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

404. Chứng minh định lí 1: "Nếu đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng P và Δ song song với Δ' nằm trong P thì Δ song song với P.

405. Chứng minh định lí 2 : "Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α. Nếu mặt phẳng β chứa d và cắt α theo giao tuyến d' thì d' song song với d".

406. Phát biểu và chứng minh định lí 3.

407. Phát biểu và chứng minh định lí 4.

408. Cho tứ diện ABCD. Lấy $M \in BC$, $N \in BD$ ($M, N \neq B, C, D$). Xác định thiết diện do mặt phẳng chứa MN và song song với AB. Thiết diện đó là hình gì ? Muốn thiết diện là hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông thì phải có thêm điều kiện gì ?

409. Cho tam giác vuông ABC (A = 1v), AC = 2AB ; AD $\not\subset$ mp ABC. $AD \perp BI$ (I là trung điểm AC), AD = AB = a. Mặt phẳng P di động, song song với AD và BI, cắt AB, AC, BD, CD theo thứ tự ở M, N, S, R.

a) Tứ giác MNRS là hình gì ?

b) Đặt AM = x. Tìm dt MNRS theo a, x. Tìm vị trí của $M \in AB$ để diện tích đó lớn nhất.

c) MN cắt SR tại K. Tìm tập K khi mp P di động, thoả mãn điều kiện.

410. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Lấy $M \in AB$, $P \in CD$ sao cho $AM = DP = \frac{1}{3}a$. Tìm diện tích thiết diện qua MP và song song với AC.

411. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D', M, N theo thứ tự là trung điểm của AA' và C'D'.

a) Xác định giao điểm của MN và (BB'D'D).

b) Xác định giao tuyến của (P) chứa MN và song song với BD cắt (B'D'D). Từ đây xác định thiết diện do (P) cắt hình lập phương.

c) Xác định giao điểm I của AC với (P).

d) Mặt phẳng (P) chia AC theo tỉ số nào ?

412. Cho hình bình hành ABCD và $S \notin (ABCD)$.

a) Xác định giao tuyến của các cặp (SAB) và (SCD), (SAD) và (SBC). Chứng minh hai giao tuyến này nằm trong một mặt phẳng song song với (ABCD).

b) Gọi E là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) chuyển động qua E và song song với BC. Chứng minh mặt phẳng (P) luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định.

c) Gọi G, H, I theo thứ tự là giao điểm của SA, SB, SD với (P). Thiết diện GHEI là hình gì ?

d) HI cắt GE tại M. Chứng minh khi G chạy trên SA thì M chạy trên một đoạn thẳng mà ta xác định được.

413. Cho tứ diện ABCD. Lấy $M \in AC$. Mặt phẳng R qua M, song song AB và CD, cắt BC, BD, AD tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình bình hành. Nó có thể là hình thoi được không ?

b) Gọi D', B' theo thứ tự là trọng tâm các mặt (BCD), (ACD). Chứng minh B'D' // (ABC) và (ABD).

c) Cho AB = a, CD = b, AC = c. Tìm dt MNPQ theo a, b, c, x (AM = x).

d) Xác định vị trí của $M \in AC$ để dt MNPQ lớn nhất.

4. Hai mặt phẳng song song

414. Hai mặt phẳng như thế nào gọi là hai mặt phẳng song song.

415. Chứng minh định lí 1. Nếu mặt phẳng α chứa hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 và d_1, d_2 cùng song song với mặt phẳng β thì α song song với β.

416. Phát biểu định lí 2 và các hệ quả.

417. Chứng minh định lí 3. Cho α và β là hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu mặt phẳng γ cắt α thì γ cũng cắt β và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

418. Chứng minh định lí 4. Hai mặt phẳng song song α, β chắn trên hai cát tuyến song song d_1 và d_2 những đoạn thẳng bằng nhau.

419. Phát biểu định lí Talet trong hình học không gian.

420. Hãy nêu khái niệm hình lăng trụ ? Hình hộp ?

421. Thế nào là phép chiếu song song.

422. Nêu các tính chất của phép chiếu song song.

423. Nêu hình biểu diễn của các hình tam giác, hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình thang, hình tròn.

424. Nêu cách biểu diễn ngũ giác đều, lục giác đều.

425. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. M, N theo thứ tự là trung điểm AD và CC'. Hỏi mặt phẳng chứa MN và song song với DB' chia BB' theo tỉ số nào ?

426. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. M, N theo thứ tự là trung điểm AD, BB'. I là tâm đáy trên của hình lập phương. Đường thẳng qua I song song MN, cắt mp AA'D'D tại K. Tìm độ dài IK biết MN = a.

427. Cho tứ diện ABCD có $\frac{AD}{BC} = k$. Lấy $M \in AB$ sao cho $\frac{AM}{AB} = n$ $(0 < n < 1)$. Mặt phẳng qua M và song song với AD, BC cắt tứ diện theo một thiết diện. Tính n theo k để thiết diện là hình thoi.

428. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Lấy $M \in AA'$ sao cho $\frac{AM}{AA'} = m$, $B \in CC'$ sao cho $\frac{CN}{CC'} = n$. Mặt phẳng chứa MN song song BD chia BB' theo tỉ số nào ?

429. Trong không gian cho hai tia Ax chéo By. Lấy $M \in Ax$, $N \in By$ thoả mãn AM = BN (*). Mặt phẳng P qua By và song song Ax. Đường thẳng d qua M, song song AB, cắt mặt phẳng P tại I.

a) Xác định giao điểm I và tìm tập I khi M chạy trên Ax.

b) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định khi M, N chạy, thoả mãn (*).

c) Tìm tập K là trung điểm của MN khi M, N chạy như trên.

430. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. Chứng minh các tia phân giác ngoài của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{BAD}$ cùng thuộc một mặt phẳng.

431. Cho mặt phẳng P và hai đường thẳng chéo nhau a và b, cắt P tại A và B. Một đường thẳng luôn luôn song song với P, cắt a ở M, b ở N. Qua N kẻ một đường thẳng song song với a, cắt P ở N'.

a) Tìm tập N' khi N chạy trên b.

b) Tứ giác MNN'A là hình gì ?

c) Dựng đoạn thẳng MN = d cho trước, MN // (P) và $M \in a$, $N \in b$.

5. Tổng hợp

432. Chứng minh rằng ba đường thẳng không đồng phẳng và đôi một cắt nhau thì nó đồng quy.

433. a) Hình chóp ngũ giác có bao nhiêu cạnh ?

b) Có hình chóp nào mà tổng số cạnh là lẻ không ?

c) Hình chóp có 18 cạnh có bao nhiêu mặt ?

434. Hai đường thẳng m, n cắt nhau tại O đường thẳng p cắt mặt phẳng P (m, n) tại I phân biệt với O. Gọi N là điểm di động trên p. Chứng minh rằng giao tuyến của các mặt phẳng (N, m) và (N, n) nằm trên một mặt phẳng cố định.

435. Cho tam giác ABC. Mặt phẳng song song với đường thẳng BC cắt cạnh AB tại P và AC tại Q. Điểm P chia cạnh AB theo tỉ số 3 : 5 (bắt đầu từ điểm A). Tính độ dài đoạn PQ nếu BC = 12 cm.

436. Cho lăng trụ tam giác ABCA'B'C'. G và G' là trọng tâm hai đáy. Qua trung điểm M của GG' kẻ một đường thẳng song song CA', nó cắt mặt ABB'A và BCC'A' tại F, E. Tìm độ dài FE biết CA' = a.

437. Cho hình hộp xiên ABCDA'B'C'D'. Lấy M ∈ AB'. Gọi I, J theo thứ tự là giao điểm của BC' và DA' với mặt phẳng MCD'.

a) Chứng minh M, I, J thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của M ∈ AB' để trung điểm của IJ thuộc mp A'B'C'D'.

438. Cho ba tia Oa, Ob, Oc không cùng nằm trên một mặt phẳng ; trên tia Oa lấy 2 điểm A, A' ; trên tia Ob lấy 2 điểm B, B' ; trên tia Oc lấy 2 điểm C, C' sao cho AB cắt A'B' tại D, BC cắt B'C' tại E ; CA cắt C'A' tại G. Chứng minh D, E, G thẳng hàng.

439. Cho hình tứ diện ABCD, gọi M là trung điểm cạnh AB, G là trọng tâm của mặt ACD và N là điểm bất kì nằm trên cạnh BC sao cho BN < NC.

a) Dựng thiết diện của hình tứ diện và mặt phẳng (MGN).

b) Tìm vị trí của N trên BC để thiết diện là hình thang.

8. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN – QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ trong không gian – hai đường thẳng vuông góc

440. Nêu một số định nghĩa của vectơ trong mặt phẳng (vectơ, giá của vectơ, độ dài của vectơ, vectơ cùng phương, cùng hướng, hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, vectơ–không).

441. Nêu một số khái niệm về vectơ trong không gian.

442. Định nghĩa về phép cộng vectơ trong không gian.

443. Nêu tính chất của phép cộng vectơ trong không gian.

444. Cho biết các quy tắc về phép cộng vectơ trong không gian.

445. Định nghĩa tích của vectơ với một số trong không gian.

446. Cho biết tính chất tích của vectơ với một số.

447. Khi nào ba vectơ được gọi là đồng phẳng.

448. Điều kiện để ba vectơ đồng phân?

449. Thế nào là góc của hai vectơ trong không gian.

450. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ trong không gian và ứng dụng của nó.

451. Cho tứ diện ABCD.

1) Tìm điểm G trong không gian sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ và G là duy nhất (điểm G gọi là trọng tâm của tứ diện).

2) Gọi A', B', C', D' là các điểm theo thứ tự chia các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA theo tỉ số k : $\dfrac{\overrightarrow{A'A}}{\overrightarrow{A'B}}=\dfrac{\overrightarrow{B'B}}{\overrightarrow{B'C}}=\dfrac{\overrightarrow{C'C}}{\overrightarrow{C'D}}=\dfrac{\overrightarrow{D'D}}{\overrightarrow{D'A}}=k$.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm O bất kì trong không gian, ta luôn có :

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$.

b) Cho 4 điểm A', B', C', D' là các điểm đồng phẳng, tìm tỉ số k ?

452. Cho tứ diện ABCD

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi C_1 là trọng tâm mặt đối diện với đỉnh C. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right).$$

c) Người ta gọi đoạn thẳng nối đỉnh của hình tứ diện với trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy là trọng tuyến của hình tứ diện. Chứng minh rằng 4 trọng tuyến của hình tứ diện cắt nhau tại một điểm, điểm đó gọi là trọng tâm của tứ diện.

453. Điểm M nằm trong miền tam giác đáy của hình chóp tam giác DABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DM}=\dfrac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}}.\overrightarrow{DA}+\dfrac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta ABC}}\overrightarrow{DB}+\dfrac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABC}}\overrightarrow{DC}$.

454. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Đặt $\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B}=\vec{b}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{c}$.

Gọi M là điểm chia trong đoạn thẳng AC_1 theo tỉ số m, điểm N chia trong đoạn thẳng CD_1 theo tỉ số n.

a) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{B_1M}$, $\overrightarrow{B_1N}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và m, n.

b) Xác định m, n để $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B_1D}$ cộng tuyến.

c) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

455. Cho tứ diện ABCD. M là một điểm di động trong không gian. Gọi G, G_1 lần lượt là trọng tâm của tứ diện và trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

c) Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho :

$$3\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$$

456. Cho hình hộp ABCD A'B'C'D'. Mặt phẳng (A'BD) cắt đường chéo AC' tại M. Tìm tỉ số AM : MC'.

457. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Gọi P, Q là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{C'Q} = -\overrightarrow{C'D}$.

1) Chứng minh đường thẳng PQ đi qua trung điểm M của BB'.

2) Tính độ dài đoạn PQ.

458. Trên các cạnh AB, BC, CD, AD của tứ diện ABCD lấy theo thứ tự các điểm A', B', C', D'. Biết rằng trong không gian tồn tại một điểm O thoả mãn :

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

Hãy chứng minh : $\dfrac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'B}} = \dfrac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'C}} = \dfrac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'D}} = \dfrac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{D'A}}$.

459. Cho hình hộp xiên ABCDA'B'C'D', G là trọng tâm ΔAB'C.

1) Chứng minh $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

2) P, Q, R là ảnh đối xứng của D' qua A, B', C. Chứng tỏ B là trọng tâm tứ diện PQRD'.

460. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R theo thứ tự là trung điểm AB, A'D'. Gọi P', Q, Q', R' theo thứ tự là giao các đường chéo các mặt ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'. Chứng minh :

1) $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

2) ΔPQR và ΔP'Q'R' có cùng trọng tâm.

2. Hai đường thẳng vuông góc

461. Thế nào là vectơ chỉ phương của đường thẳng.

462. Cho biết tính chất vectơ chỉ phương của đường thẳng.

463. Thế nào là góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

464. Định nghĩa hai đường thẳng vuông góc.

465. Cho hình tứ diện đều cạnh a. Gọi M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm cạnh CD.

a) Tính độ dài đoạn MN.

b)Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC.

c) Chứng minh MN vuông góc với cạnh AB và CD.

d) Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

466. Cho tứ diện ABCD

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = 0$

b) Chứng minh rằng nếu AC ⊥ BD và AB ⊥ DC thì AD ⊥ BC.

467. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

a) Tính góc của hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC'.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Tính góc của hai vectơ $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{BM}$.

468. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD. Tìm độ dài đoạn MN.

(Trích đề thi vào ĐH Giao thông vận tải – 1997 cho HS chuyên ban).

469. Cho tứ diện ABCD với AB = CD, AD = BC. Trong mặt phẳng BCD dựng ΔPQR sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm các cạnh RQ, RP, PQ. Chứng minh AP, AQ, AR vuông góc với nhau đôi một.

(Trích đề thi vào ĐH Y – Dược TP. Hồ Chí Minh – 1996).

3. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

470. 1) Định nghĩa đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng α.

2) Phát biểu định lí nêu điều kiện để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng α.

471. Thế nào là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng α. Khi nào mặt phẳng α được hoàn toàn xác định.

472. Định nghĩa vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng.

473. Phát biểu các tính chất của sự liên quan giữa quan hệ vuông góc và quan hệ song song.

474. Phát biểu và chứng minh định lí ba đường vuông góc.

475. Thế nào là góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

476. Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ mp BCD, tam giác BCD vuông ở C, tam giác ABC cân ; M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC, AD. Chứng minh :

a) CD vuông góc với mp (ABC).

b) BM vuông góc với mp (ABC).

477. Cho ΔABC vuông ở C. Đường thẳng d ⊥ mp ABC tại A. Lấy D ∈ d. Kẻ AI ⊥ CD, AJ ⊥ BD.

a) Chứng minh AI ⊥ mp (BCD) và BD ⊥ (AIJ).

b) Chứng minh tứ giác BCIJ nội tiếp đường tròn tâm O'. Suy ra OO' ⊥ mp (BCD) (O là trung điểm AB).

c) Tìm một điểm cách đều 5 điểm : A, B, C, I, J.

d) IJ cắt mp ABC tại K. Chứng minh AK là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

e) ΔABC cố định. D chạy trên d. Chứng minh IJ luôn luôn đi qua một điểm cố định. Tìm tập điểm I, J.

478. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'.

a) Chứng minh A'C vuông góc với mp AB'D'.

b) A'C cắt mp AB'D' tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAB'D' và tìm bán kính của nó, biết cạnh hình lập phương bằng a.

479. Cho ΔABC có các góc nhọn. Đường thẳng $d \perp$ mp ABC tại A. Lấy $M \in d$. Kẻ $BK \perp AC$, kẻ $BH \perp MC$, KH cắt d tại N. Chứng minh :

a) $BN \perp CM$.

b) $BM \perp CN$.

c) Hãy chỉ ra cách dựng điểm $M \in d$ sao cho đoạn MN ngắn nhất.

480. Cho đường tròn (O, R), đường kính AB. Lấy $C \in AB$ và đặt $AC = x$ $(0 < x < 2R)$. Một dây cung KL qua C. Đường thẳng $d \perp$ mp P (chứa đường tròn) tại A. Lấy $S \in d$ và có $SA = h$. Mặt phẳng Q qua A, vuông góc SB tại B', cắt SC, SK, SL theo thứ tự C', K', L'.

a) Chứng minh tứ giác AK'B'L' nội tiếp được.

b) KL phải thoả mãn điều kiện gì để C' là trung điểm đoạn K'L'.

c) Tìm điều kiện của đường thẳng KL để tứ giác AK'B'L' là hình vuông.

4. Hai mặt phẳng vuông góc

481. 1) Cho biết khái niệm góc giữa hai mặt phẳng.

2) Thế nào là hai mặt phẳng vuông góc.

482. 1) Phát biểu định lí về điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc và các hệ quả.

2) Chứng minh định lí : Nếu hai mặt phẳng α và β cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng γ thì giao tuyến d của α và β vuông góc với γ.

483. Thế nào là hình lăng trụ đứng, hình lăng trụ đều, hình hộp đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

484. Thế nào là hình chóp đều, hình chóp cụt đều.

485. Cho hai mặt phẳng P và Q vuông góc và giao tuyến của hai mặt phẳng là d. Hai điểm A, B nằm trên d, AC thuộc P và BD thuộc Q sao cho AC và BD cùng vuông góc với d. Tìm độ dài đoạn thẳng CD biết AB = 6cm, AC = 3cm, BD = 2cm.

486. Đáy của lăng trụ đứng ABC. A'B'C' là một tam giác cân đỉnh B, $BA = BC = 7$, $AC = 2$. Qua AC vẽ một mặt phẳng tạo với đáy dưới một góc 30^o, cắt cạnh bên tại D. Tìm diện tích thiết diện và độ dài BD.

487. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Lấy $M \in AD'$, $N \in BD$ với $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$.

a) Chứng minh : với $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì đoạn MN ngắn nhất.

b) Khi MN ngắn nhất, hãy chứng minh :

α) MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD.

β) MN // A'C.

c) Chứng minh : khi x thay đổi thì MN luôn luôn song song mp A'BCD'.

488. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy M ∈ BC, đặt CM = x, N ∈ CD, đặt CN = y. Trên đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng ABCD lấy điểm S. Tìm sự liên hệ giữa x và y để :

a) Góc giữa hai mặt phẳng (MSA) và (NSA) bằng 45^0.

b) Mặt phẳng SAM vuông góc với mặt phẳng SMN.

489. Đáy của lăng trụ đứng ABCA'B'C' là tam giác vuông ở B, AB = a, BC = b. Cạnh bên bằng c ($c^2 \geq a^2 + b^2$). Một mặt phẳng qua A và vuông góc với CA' cắt lăng trụ theo một thiết diện. Hãy xác định thiết diện và tìm diện tích của nó.

490. Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a, các góc $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^0$, $\widehat{BOC}$ = 1v.

a) Tính độ dài các cạnh còn lại của tứ diện và chứng tỏ ΔABC vuông.

b) Chứng minh OA ⊥ BC. Gọi I, J là trung điểm OA, BC, chứng minh IJ là đường vuông góc chung của OA và BC.

c) Chứng minh mặt phẳng ABC ⊥ mp BOC. Tính độ dài IJ theo a.

491. Cho mp P ⊥ mp Q theo giao tuyến (Δ).

a) Chứng minh : nếu mp R cắt P và Q theo hai giao tuyến (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau thì : hoặc (d_1) ⊥ (Δ), hoặc (d_2) ⊥ (Δ).

b) Cho A ∉ P, A ∉ Q. Hãy chỉ ra cách dựng mp qua A, cắt P và Q theo hai giao tuyến vuông góc với nhau.

c) Đường thẳng (d) phải thoả mãn điều kiện gì để có vô số mp R đi qua (d), cắt P, Q theo hai giao tuyến vuông góc với nhau ?

5. Khoảng cách

492. Cho biết khoảng cách :

a) Từ một điểm đến một đường thẳng.

b) Từ một điểm đến một mặt phẳng.

c) Từ một đường thẳng đến một mặt phẳng.

d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

493. a) Chứng minh định lí : Hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn có duy nhất một đường thẳng Δ cắt cả a và b đồng thời vuông góc với mỗi đường thẳng ấy.

b) Phát biểu định nghĩa đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

c) Phát biểu định nghĩa về khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

494. Cho hai mặt phẳng P và Q vuông góc với nhau, gọi d là giao tuyến của chúng. Cho hai điểm A ∈ Q, B ∈ P thoả mãn khoảng cách từ B đến Q bằng khoảng cách từ A đến P. Chứng minh rằng góc tạo bởi AB với mp P và mp Q bằng nhau.

495. Hai tam giác cân cùng chung đáy thuộc hai mặt phẳng cắt nhau tạo với nhau góc 60^o, cạnh đáy chung dài 16. Một tam giác cân có cạnh bên dài 17, tam giác kia có hai cạnh bên vuông góc với nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đỉnh của tam giác.

496. Cho d ⊥ d' và chéo nhau. Cho A cố định trên d và B chạy trên d'. Lấy $C \in d'$ sao cho mp (d, B) ⊥ mp (d, C). Gọi A', B', C' là chân các đường cao trong ΔABC kẻ từ các đỉnh tương ứng.

a) Chứng minh : A'B. A'C không đổi, và $AB^2 + AC^2 - BC^2$ không đổi.

b) Chứng minh trực tâm của ΔABC cố định mặc cho B, C ở đâu trên d'.

c) Tìm quỹ tích B', C'.

497. Cho hình thang cân ABCD với AB = 2a, BC = CD = DA = a. Tia Ax ⊥ mp ABCD. Điểm S chuyển động trên Ax. Mp qua A vuông góc SB, cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại P, Q, R.

a) Chứng minh tứ giác CDRQ nội tiếp đường tròn, và đường thẳng QR luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên Ax.

b) Cho $SA = a\sqrt{3}$. Tìm diện tích APQR.

498. Đáy hình chóp PQRS là tam giác đều cạnh bằng m, cạnh bên $PQ = m\sqrt{2}$. Chân đường cao hình chóp kẻ từ đỉnh P là trung điểm RS. Cắt hình chóp bằng một mp song song với PQ và RS, cách Q một khoảng d. Tìm diện tích thiết diện.

499. Đáy hình chóp SABCD là hai tam giác đều ABD và CBD, cạnh a. Cạnh bên SA ⊥ đáy và SA = h. AC cắt BD tại O, M chạy trên AC. Mp Q qua M và vuông góc AC.

a) Khi M chạy trên OC thì mp Q cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ? Tìm diện tích thiết diện với MC = x. Khi nào thì diện tích đó lớn nhất ?

b) Khi M thuộc AO, đặt MA = t. Tìm diện tích thiết diện theo t. Khi nào diện tích ấy lớn nhất ?

c) Tìm vị trí của $M \in AC$ để thiết diện có diện tích lớn nhất ?

500. Cho hình chóp tam giác đều SABC. Gọi α là góc giữa mặt bên và đáy, φ là góc giữa hai mặt bên kề nhau.

a) Tính chiều cao hạ từ đỉnh S của hình chóp theo φ và theo khoảng cách a từ chân đường cao đến cạnh bên.

b) Xác định quan hệ giữa α và φ.

PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Định nghĩa hàm số lượng giác

- Hàm số sin

$$\begin{aligned} \sin :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = \sin x \end{aligned}$$

- Hàm số cosin

$$\begin{aligned} \cos :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = \cos x \end{aligned}$$

- Hàm số tang

Gọi $D_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\begin{aligned} \tan :\ & D_1 \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = \tan x \end{aligned}$$

- Hàm số cotang

Gọi $D_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\begin{aligned} \cot :\ & D_2 \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = \cot x \end{aligned}$$

2. a) Hàm số y = f(x) = sinx

- Tập xác định : D = $\mathbb{R}$
- Tập giá trị [−1 ; 1]
- Ta có f(−x(= sin(−x) = −sinx = −f(x), vậy hàm số : y = f(x) = sinx là hàm số lẻ.
- Hàm số y = sinx là hàm số tuần hoàn với chu kì T = 2π.
- Bảng biến thiên : Hàm số y = sinx là hàm số lẻ tuần hoàn có chu kì T = 2π, nên ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y = sinx				↗	1	↘			
			0				0	↘	
	−1	↗							−1

b) Hàm số y = f(x) = cosx

- Tập xác định : D = $\mathbb{R}$
- Tập giá trị : [−1 ; 1]

- Ta có $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$, vậy hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$
- Bảng biến thiên : Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì 2π, nên ta có bảng biến thiên :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

c) Hàm số $y = \tan x$

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{ x \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \}$
- Tập giá trị : $\mathbb{R}$
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$
- Bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

d) $y = \cot x$

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \mid \{ x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$
- Tập giá trị : $\mathbb{R}$
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì π
- Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \cot x$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

3. Đồ thị

a) $y = \sin x$

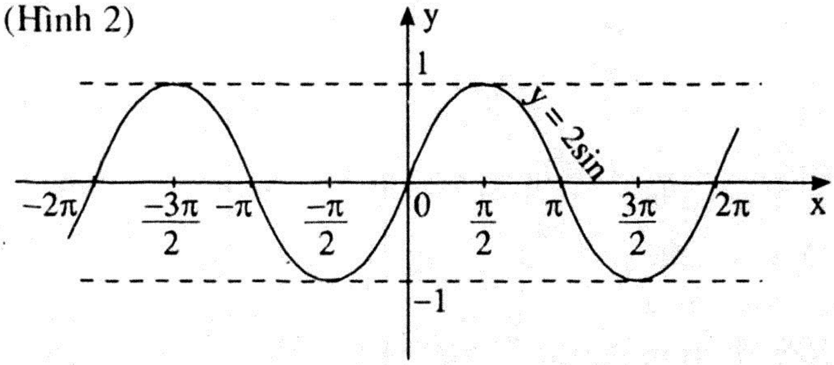
- Sử dụng kết quả của bài tập 2, ta biết $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn có chu kì là 2π. Cho nên ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trong một chu kì $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ sau đó tịnh tiến đồ thị tìm được theo các vectơ $k\,2\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\vec{i}$ là vectơ đơn vị của trục hoành), ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$.

- Lập bảng giá trị của hàm số y = sinx của các góc đặc biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
y = sinx	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1

- Hàm số y = sinx đồng biến trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- Đồ thị (Hình 2)



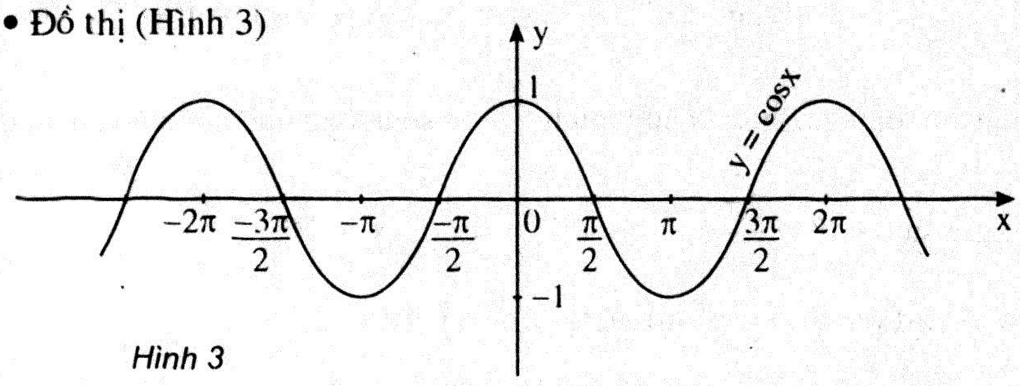
Hình 2

b) y = cosx

- Sử dụng kết quả bài tập 2, hàm số y = cosx tuần hoàn có chu kì 2π, cho nên ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số y = cosx trong một chu kì [0 ; 2π], sau đó tịnh tiến đồ thị tìm được theo các vectơ $k\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\vec{i}$ là vectơ đơn vị của trục hoành), ta được đồ thị hàm số y = cosx.
- Lập bảng giá trị của hàm số y = cosx của các góc đặc biệt thuộc đoạn [0 ; 2π].

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y = cosx	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

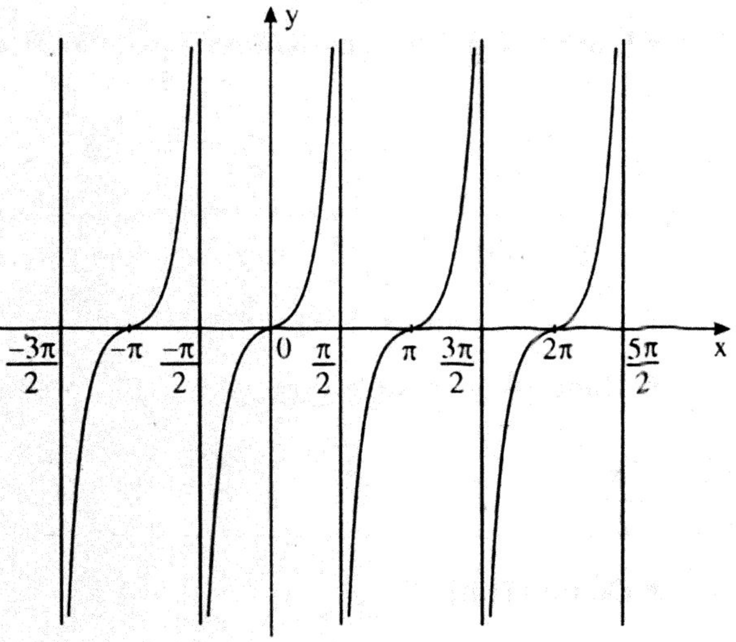
- Hàm số y = cosx nghịch biến trên đoạn [0 ; π] và đồng biến trên đoạn [π, 2π]
- Đồ thị (Hình 3)



Hình 3

c) y = tanx là hàm số lẻ chu kì là π. Do đó có thể chỉ cần vẽ đồ thị trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tịnh tiến đồ thị này theo các vectơ $k\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\vec{i}$ là vectơ đơn vị của trục hoành), ta sẽ được đồ thị hàm số y = tanx.

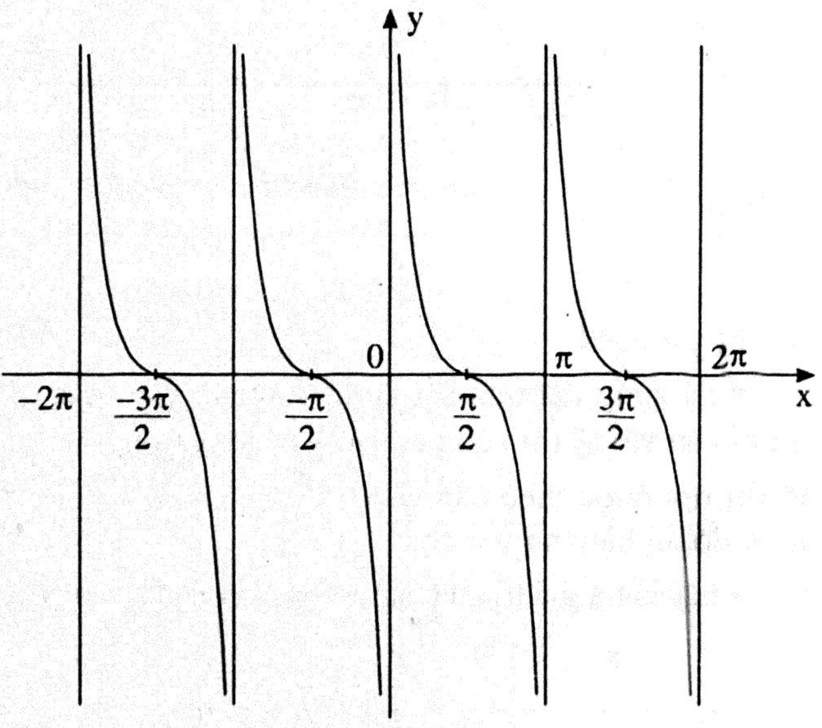
- Đồ thị (Hình 4)



Hình 4

d) y = cotx là hàm số lẻ với chu kì là π. Vậy có thể vẽ đồ thị của nó trong khoảng (0 ; π), sau đó tịnh tiến đồ thị này theo các vectơ $k\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta sẽ được đồ thị hàm số y = cotx.

- Đồ thị (Hình 5)



Hình 5

4. a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) \in \mathbb{R}$.

Ta có $f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = A\sin(\omega x + \alpha) = f(x)(*)$. Vậy f(x) là hàm số tuần hoàn. Bây giờ ta sẽ chứng minh $\frac{2\pi}{\omega}$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn (*).

Thật vậy, giả sử $0 < T < \frac{2\pi}{\omega}$ mà $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy ta có $A\sin(\omega x + \alpha) = A\sin[\omega(x + T) + \alpha]$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi $x = 0 \Rightarrow A\sin\alpha = A\sin(\omega T + \alpha) \Rightarrow \omega T = k2\pi \Rightarrow T = \dfrac{k2\pi}{\omega}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Điều này trái với giả thiết $0 < T < \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Do đó hàm số $y = f(x) = A\sin(\omega x + \alpha)$ là hàm số tuần hoàn có chu kì là $\dfrac{2\pi}{\omega}$ (với $A \neq 0$, $\omega \neq 0$).

b) Cũng chứng minh tương tự hàm số $y = g(x) = \tan(\omega x + \alpha)$ là hàm số tuần hoàn có chu kì là $\dfrac{\pi}{\omega}$ (với $A \neq 0$; $\omega \neq 0$).

5. Hàm số $y = f(x) = \sin 2x$ có :

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị : $[-1 ; 1]$

$f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$ nên hàm số này là hàm số lẻ.

- Theo câu a) bài 4 $y = f(x) = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn có chu kì $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (ở đây $\omega = 2$, $\alpha = 0$, $A = 1$).
- Hàm số $y = \tan 2x$
- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4}(2k+1), k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Tập giá trị $\mathbb{R}$
- $f(-x) = \tan(-2x) = -\tan(2x) = -f(x)$ nên hàm số $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ.
- Theo b) bài 4 hàm số $y = \tan 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{2}$ (ở đây $A = 1$, $\omega = 2$, $\alpha = 0$).

6. $A = \dfrac{1}{1 + \sin\alpha}$, A nhỏ nhất khi và chỉ khi $1 + \sin\alpha$ lớn nhất

$(1 + \sin\alpha)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy A nhỏ nhất $= 1/2 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$B = \dfrac{1}{1 - \cos\alpha}$, B nhỏ nhất $\Leftrightarrow (1 - \cos\alpha)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha = -1$

$\Leftrightarrow \alpha = \pi + k2\pi = (2k + 1)\pi$

7. a) Nhìn vào đồ thị (bài 3, c) ta có từ 217^o đến 220^o hàm số tanx đồng biến nên $\tan 220^o > \tan 217^o \Rightarrow \tan 220^o - \tan 217^o > 0$.

b) $B = \cot 100^o - \tan 100^o = \dfrac{1}{\tan 100^o} - \tan 100^o = \dfrac{1 - \tan^2 100^o}{\tan 100^o}$.

Ta có $-1 < \tan 100^o < 0 \Leftrightarrow 1 > \tan^2 100^o > 0 \Rightarrow B < 0$.

c) $C = \sin 58^{o} - \sin 32^{o} > 0$ vì $\sin 58^{o} > \sin 32^{o}$.

d) $D = \sin 81^{o} - \dfrac{\sin 81^{o}}{\cos 81^{o}} = \dfrac{\sin 81^{o}(\cos 81^{o} - 1)}{\cos 81^{o}}$

Ta có : $\cos 81^{o} > 0$, $\sin 81^{o} > 0$, $\cos 81^{o} < 1$ nên $D < 0$.

e) $E = \dfrac{\cos 125^{o}}{\sin 125^{o}} - \cos 125^{o} = \dfrac{\cos 125^{o}(1 - \sin 125^{o})}{\sin 125^{o}}$

Ta có : $\cos 125^{o} < 0$, $0 < \sin 125^{o} < 1$ nên $E < 0$

f) Do $\sin 100^{o} > 0$, $\cos 100^{o} < 0$ nên $F < 0$.

g) Do $\tan 200^{o} > 0$, $\cos 350^{o} > 0$ nên $G > 0$.

8. a) $\cos(\alpha + \pi)$ mang dấu "–" do $\alpha < \alpha + \pi < \dfrac{3\pi}{2}$.

b) $\tan(\alpha - \pi) = \tan\alpha$, mang dấu "+" do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

c) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$, mang dấu "–" do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

d) $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{8}\right) = -\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{8}\right)$ mang dấu "+".

9. a) Hàm số xác định với $\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1$

$$x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $y = \cot\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \neq k\pi$

$x \neq -\dfrac{2\pi}{3} + k\pi$. Vậy TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) y xác định $\Leftrightarrow 1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pm\pi + k2\pi$

Vậy TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi + k2\pi\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

d) y xác định $\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Vậy TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. a) $f(-x) = \cot(-x) + 2\sin(-x) = -\cot x - 2\sin x$

$= -f(x)$. Vậy hàm số này là hàm lẻ.

b) $f(-x) = \sin^2(-x) - \cos(-x) = (-\sin x)^2 - \cos x = \sin^2 x - \cos x = f(x)$

Vậy hàm số này là hàm chẵn.

c) $f(-x) = \cos(-5x)\sin(-2x) = -\cos 5x \sin 2x = -f(x)$

Vậy hàm số này là hàm lẻ.

d) Tương tự, hàm số này lẻ.

11. 1) Tương tự như bài 4. Muốn chứng minh một hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D tuần hoàn có chu kì 2π, ta phải chứng minh : $x \pm 2\pi \in D$ và $f(x + 2\pi) = f(x)\ \forall x \in D$ và 2π là số bé nhất thêm vào x.

a) $f(x) = \cos x + \sin x$, $D = \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi) = \cos x + \sin x = f(x)$

Không khó khăn lắm ta chứng minh được 2π là số nhỏ nhất thêm vào x.

Vậy chu kì của hàm số tuần hoàn $f(x) = \cos x + \sin x$ là 2π.

b) Tương tự

2) a) Xem bài 4.a) $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (ở đây $A = 1, \omega = 2, \alpha = 0$)

b) $y = \cos 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)\sin$

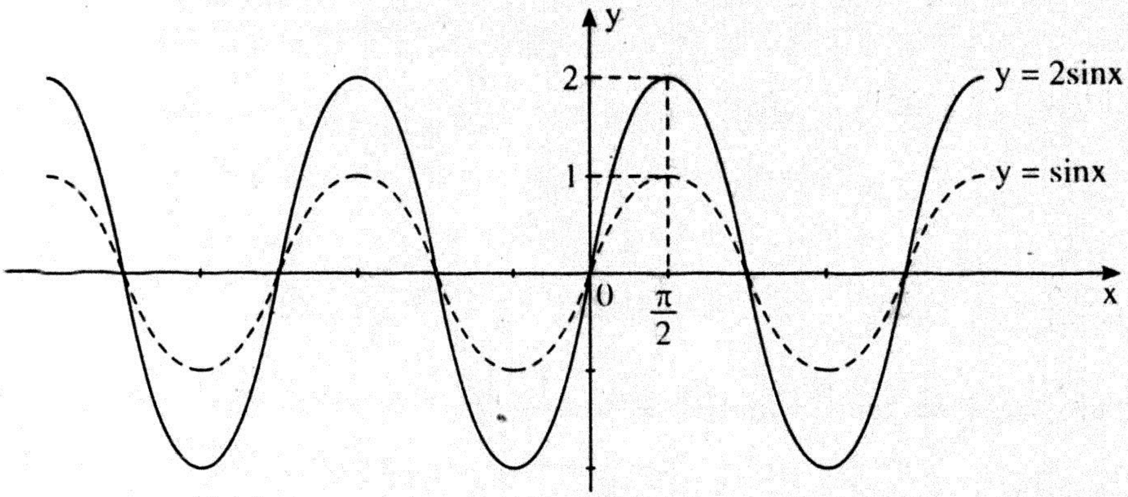
$= -\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Áp dụng bài 4.a) ta có hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (ở đây $A = -1, \omega = 2, \alpha = -\dfrac{\pi}{2}$).

c) HS tự làm.

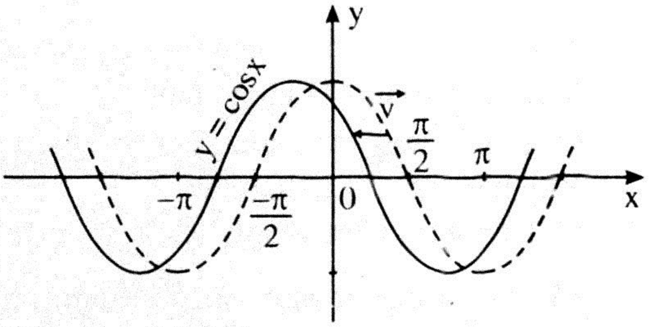
12. HS tự làm

13. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$, chỉ việc dãn ra dọc theo trục tung lên gấp 2 thì được đồ thị hàm số $y = 2\sin x$ (Hình 6).



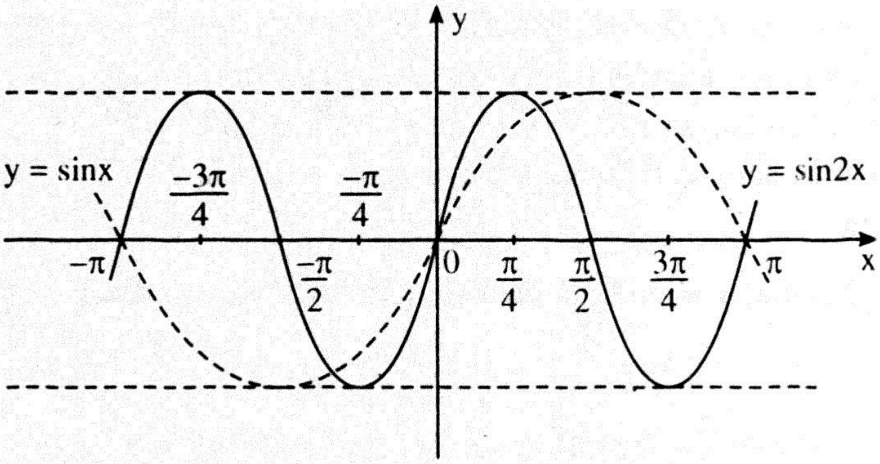
Hình 6

b) Vẽ đồ thị $y = \cos x$ sau đó tịnh tiến dọc theo trục hoành về bên trái $\frac{\pi}{4}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.



Hình 7

c) $y = f(x) = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn có chu kì π. Đồ thị là hình 8.



Hình 8

14. a) Phương trình $\sin x = \sin\alpha$, có hai họ cung nghiệm :

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Phương trình $\cos x = \cos\alpha$, có hai họ cung nghiệm

$$x = \pm\,\alpha + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

c) Phương trình $\tan x = \tan\alpha$, có họ cung nghiệm

$$x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d) Phương trình $\cot x = \cot\alpha$, có họ cung nghiệm

$$x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

15. a) $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ hay } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

b) $\cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + k6\pi$

c) $\tan\frac{x}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\frac{x}{4} = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Vậy $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$

d) $\cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

$x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

16. a) $\sin\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3} + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{3} = 0 \\ \sin\frac{x}{3} = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3k\pi \\ x = -\frac{3\pi}{2} + k6\pi, \end{array}\right.$$

$(k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \text{ vô nghiệm}\right)$

c) $\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \; (\in \mathbb{Z})$$

d) $(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin x \Leftrightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

e) Điều kiện : $\sin x \neq 0$ $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ có PT :

$$\cot^2 x(\cot x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cot^3 x = 0 \\ \cot x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

g) Chắc chắn $\cos x \neq 0$ (vì $\cos x = 0$ cho $\sin x = 1$, PT không nghiệm đúng), nên có PT tương đương :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý : ta cũng có $\sin x \neq 0$ (vì $\sin x = 0$ cho $\cos x = 1$, PT không nghiệm đúng) nên cố PT tương đương $\cot x = 1$ và có ĐS như trên.

17. a) $5\sin x - 2\cos x = 0$, $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình vì khi $\cos x = 0$ thì $\sin x = 1$ nên VP = 5, VT = 0.

Chia hai vế của phương trình cho cosx ta được

$$5\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{2}{5} = \tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z},\ \tan\alpha = \frac{2}{5})$$

b) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$. Giải thích như a) ta có $\cos x \neq 0$. Chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được :

$$\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x + \sqrt{3})(\tan x - \sqrt{3}) = 0$$

- $\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

c) $\cot\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x + \frac{1}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

d) $\sin\frac{x+1}{4} = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \frac{x+1}{4} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

$$x = \left(-1 - \frac{2}{3}\pi\right) + k8\pi, \quad x = \left(-1 + \frac{14\pi}{3}\right) + k8\pi$$

e) $\sin 2x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \\ \cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

g) $\sin 2x = \sin 3x \Rightarrow 2x = 3x + k2\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$$2x = \pi - 3x + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5}(2k+1)$$

h) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{12} = \pm\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + k2\pi$

- $2x + \frac{\pi}{12} = 4x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$
- $2x + \frac{\pi}{12} = -4x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{72} + k\frac{\pi}{3}$

18. a) $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2}{3}\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos 3x = \cos\left(\frac{7\pi}{6} - x\right) \Rightarrow 3x = \pm\left(\frac{7\pi}{6} - x\right) + k2\pi$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{8} - x = \frac{\pi}{4} - 3x + k\pi$

$\Rightarrow = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

d) $\sin 2x = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{x}{2} + 2k\pi \\ 2x = \pi + \frac{x}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{5}k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}k2\pi \end{array}\right.$

e) $\tan 3x = -\cot\frac{x}{3} \Leftrightarrow \tan 3x = \cot\left(-\frac{x}{3}\right).$

$\Leftrightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right) \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{3} + k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{8}k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

g) $\left[\begin{array}{l} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

h) $\tan x = \dfrac{1}{\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow \tan x = \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = 3x - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$

19. a) $\sin x(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 1 + 2\cos x = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi. \end{array}\right.$

b) $\cos 5x(1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0 \\ 1 + \cos 2x = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \\ \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$

c) Điều kiện : $\sin x \neq 0 \Rightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x = 1 - \sin x \Leftrightarrow \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\sin x} - (1 - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)(\cot x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cot x = 1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d) $1 + \sin x + \cos 3x(1+\sin x) = 0 \Leftrightarrow (1+\sin x)(1+\cos 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos 3x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

20. a) $5\cos x(1 - \cos 2x) + 2\sin x(1 - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)(5\cos x + 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}1 - \cos 2x = 0\\ 5\cos x + 2\sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \tan x = -\dfrac{5}{2} = \tan\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\\ x = \alpha + k\pi\end{array}\right.$$

b) Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x \neq k\pi\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x\cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)}{\sin x\cos x} - (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\frac{1 - \sin x\cos x}{\sin x\cos x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \dfrac{1 - \sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\cos x\\ 1 - \sin x\cos x = \sin x\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1 \quad (\text{đã có } \cos x \neq 0)\\ 2\sin x\cos x = 1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

c) Đk : $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$$1 + \cos x - \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - \tan x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}1 + \cos x = 0\\ 1 - \tan x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \tan x = 1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

d) 2sinx − 2cosx + 4sinxcosx − 1 = 0

⇔ 2sinx − 1 + 2cosx(2sinx − 1) = 0

⇔ (2sinx − 1)(1 + 2cosx) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \text{ và } x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$$

21. a) **Đk** : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \neq k\pi\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x} + \frac{\cos x\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x\cos x\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x\cos x = 0 \text{ (loại vì đk)}\\ \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x} = -\dfrac{1}{\cos x}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b) **Đk** : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

$$\sin^3 x.\frac{\sin x - \cos x}{\sin x} - \cos^3 x.\frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = 0$$

⇔ (sinx − cosx)($\sin^2$x + $\cos^2$x) = 0 ⇔ sinx = cosx

⇔ tgx = 1 (vì cosx ≠ 0) ⇔ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (k ∈ $\mathbb{Z}$).

c) cosx(sinx − 1) − 2(sinx − 1) = 0 ⇔ (sinx − 1)(cosx − 2) = 0

⇔ sinx − 1 = 0 (vì cosx −2 ≠ 0) ⇔ sinx = 1 ⇔ $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

d) Có $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$

có PT tương đương :

$2(1 + \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos x$

$\Leftrightarrow -(\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x) + 2 = \cos x$

$\Leftrightarrow -(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 2 = \cos x$

⇔ cosx = 1 ⇒ x = k2π (k ∈ $\mathbb{Z}$).

e) $(1-\sin^2x)(1+\sin^2x)-\cos^4x=0$

$\Leftrightarrow \cos^2x(1+\sin^2x)-\cos^4x=0 \Leftrightarrow \cos^2x(1+\sin^2x-\cos^2x)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2x\cos^2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

22. $a\cos x+b\sin x=c$ (*) (a và $b\neq 0$). Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta có : (*) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Đặt $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$

ta có phương trình : $\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Nếu $\left(\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\leq 1$, ta tìm được góc φ để $\cos\varphi=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=\cos\varphi$ suy ra $x-\alpha=\pm\varphi+k2\pi$

hay $x=\alpha\pm\varphi+k2\pi$

Điều kiện tồn tại nghiệm : Để (*) có nghiệm ta phải có :

$\left(\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{c^2}{a^2+b^2}\leq 1$ hay $a^2+b^2\geq c^2$

23. Các phương trình a) và b) có cách giải giống nhau. Ta giải phương trình a). Đặt $t=\sin x \Rightarrow |t|\leq 1$, ta có :

$$a\sin^2x+b\sin x+c=0 \Leftrightarrow at^2+bt+c=0 \text{ (với } -1\leq t\leq 1)$$

Giải phương trình này nếu có nghiệm, ta được $t=t_1$, $t=t_2$.

Do đó : a) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=t_1\\ \sin x=t_2\end{array}\right.$.

Như vậy ta đã đưa phương trình a) về dạng cơ bản,

Các phương trình c) và d) có cách giải tương tự nhau. Ta giải phương trình c) và đặt $t=\tan x$, ta có :

$$at^2+bt+c=0.$$

Giả sử có $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, phương trình có các nghiệm t_1, t_2.

Như vậy ta có c) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = t_1\\ \tan x = t_2\end{array}\right.$

Ta đã đưa c) về phương trình dạng cơ bản.

24. 1) Nếu a = 0 hay b = 0, dễ dàng đưa về phương trình dạng cơ bản hay phương trình dạng bài 18.

- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$, đặt sinx + cosx = t $\Rightarrow b\sin x\cos x = b.\dfrac{t^2-1}{2}$.

Phương trình có thể viết thành $bt^2 + 2at + 2c - b = 0$

Với $|t| \leq \sqrt{2}$ (do sinx + cosx = $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$). Giả sử phương trình này có nghiệm $t = t_1$, $t = t_2$ thoả mãn điều kiện. Khi đó có dạng

$$\cos x + \sin x = t_1 \text{ và } \cos x + \sin x = t_2 \text{ (dạng bài 18).}$$

Chú ý : Nếu phương trình có dạng a(sinx – cosx) + bsinxcossx = c cũng làm tương tự.

2) $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$

- Cách giải 1 :

Ta có $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

Phương trình 2) có thể viết thành

$(c-a)\cos 2x + b\sin 2x = -a - c$. Như vậy phương trình đã đưa về dạng bài tập 18 (mà ta đã biết cách giải).

- Cách giải 2 :

Ta thấy $\cos x \neq 0 \Rightarrow$ chia cả 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x$ khi đó phương trình đã cho trở thành

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0 \text{ (ta đã biết cách giải bài 23).}$$

25. a) Điều kiện cần và đủ để phương trình acosx + bsinx + c = 0 có nghiệm là $a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$. Nếu điều kiện này không thoả mãn thì phương trình vô nghiệm.

$\sqrt{3^2+4^2} = 5$. Đặt $\dfrac{3}{5} = \cos\varphi$; $\dfrac{4}{5} = \sin\varphi$.

Chia hai vế của a) cho 5 và biến đổi ta được phương trình :

$\cos\varphi\cos x - \sin\varphi\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos(\varphi + x) = 1 = \cos 0$

$\Rightarrow \varphi + x = k2\pi \Leftrightarrow x = -\varphi + k2\pi \left(\cos\varphi = \dfrac{3}{5}\right)$.

b) Ta có $a^2 + b^2 - c^2 = 25 + 9 - 36 = -2 < 0$, vậy phương trình vô nghiệm.

c), d) đều thoả mãn $a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$, nên phương trình đều có nghiệm. Cách giải tương tự như a).

26. Sử dụng điều kiện ở bài 22

a) $m^2 + 1 - (m + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$

b) $(2m - 1)^2 + m^2 - (m - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 + m^2 - m^2 + 2m - 1 \geq 0.$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow 2m(2m - 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ hoặc $m \geq \frac{1}{2}$.

c) $\cos^2 x - 2\cos x = m$. Đặt $\cos x = t \Rightarrow |t| \leq 1$.

Ta có phương trình : $t^2 - 2t = m$ (*) có nghiệm trong đoạn $[-1 ; 1]$.

Xét hàm số $y = t^2 - 2t$ trong đoạn $[-1 ; 1]$ là hàm số luôn luôn nghịch biến GTLN $y = y(-1) = 3$, GTNN $y = y(1) = -1$.

Vậy muốn phương trình (*) có nghiệm trong đoạn $[-1 ; 1]$ thì $-1 \leq m \leq 3$.

d) $\cos 2x - \sin x + m = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + m + 1 = 0$ có nghiệm.

Đặt $\sin x = u \Rightarrow |u| \leq 1$. Ta có phương trình :

$$2u^2 + u = m + 1 \text{ (*), có nghiệm trong đoạn } [-1 ; 1].$$

Xét hàm số $y = 2u^2 + u$ đồ thị là một parabol quay bề lõm về phía trên nên GTNN $y = y\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$.

Trên đoạn $\left[-1 ; -\frac{1}{4}\right]$ hàm số nghịch biến, trên đoạn $\left[-\frac{1}{4} ; 1\right]$ hàm số đồng biến nên GTLN $y = y(1) = 3$. Vậy muốn (*) có nghiệm trong đoạn $[-1 ; 1]$ thì $-\frac{1}{8} \leq m + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{9}{8} \leq m \leq 2$.

27. a) $y = 5\cos x - 2\sin x = \sqrt{29}\cos x$ (với $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}$)

$\Rightarrow -\sqrt{29} \leq y \leq \sqrt{29} \Rightarrow$ GTNN $y = -\sqrt{29}$, GTLN $y = \sqrt{29}$.

b) Làm tương tự như a), min $y = -\sqrt{13}$, max $y = \sqrt{13}$.

c) Trước hết ta phải tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = a\cos x + b\sin x$ (*)

Biến đổi ta có $y = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi)$ mà $|\cos(x - \varphi)| \leq 1$.

$\Rightarrow |y| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$ GTLN $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, GTNN $y = -\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ta có : $y = (a\cos x + b\sin x)(c\cos x + d\sin x)$

$$= ac\cos^2 x + ad\cos x\sin x + bc\cos x\sin x + bd\sin^2 x$$

$$= \frac{ac(\cos 2x + 1)}{2} + \frac{1}{2}ad\sin 2x + \frac{1}{2}bc\sin 2x + \frac{bd(1 - \cos 2x)}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}(ac - bd)\cos 2x + \frac{1}{2}(ad + bc)\sin 2x + \frac{1}{2}(ac + bd)$$

Đặt $Y = \frac{1}{2}(ac - bd)\cos 2x + \frac{1}{2}(ad + bc)\sin 2x$

Vậy GTNN $y = \text{GTNN } Y + \frac{1}{2}(ac + bd)$

GTLN $y = \text{GTLN } Y + \frac{1}{2}(ac + bd)$

Từ kết quả (*) ta có

$$\text{GTNN } Y = -\sqrt{\frac{1}{4}(ac - bd)^2 + \frac{1}{4}(ad + bc)^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

$$\text{GTLN } Y = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Do đó GTNN $y = -\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + \frac{1}{2}(ac + bd)$

GTLN $y = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + \frac{1}{2}(ac + bd)$

Áp dụng tìm GTNN và GTLN của $y = (3\sin x - 4\cos x)(4\sin x - 3\cos x)$

Ở đây $a = -4$, $b = 3$, $c = -3$, $d = 4$. Vậy ta có :

$$\text{GTNN } y = -\frac{1}{2}\sqrt{(16+9)(9+16)} + \frac{1}{2}(12+12) = -\frac{25}{2} + \frac{24}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{GTLN } y = \frac{25}{2} + \frac{24}{2} = \frac{49}{2}.$$

Cách 2. Ta có thể làm đơn giản như sau:

$$y = (3\sin x - 4\cos x)(4\sin x - 3\cos x)$$
$$= 12\sin^2 x - 9\sin x\cos x - 16\sin x\cos x + 12\cos^2 x$$
$$= 12 - 25\sin x\cos x = 12 - \frac{25}{2}\sin 2x$$

Ta có $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow$ GTLN $y = 12 + \frac{25}{2} = \frac{49}{2}$

GTNN $y = 12 - \frac{25}{2} = -\frac{1}{2}$

Bài này đặc biệt là $ac = bd$ (xem cách 1).

d) $y = \frac{\cos x - 2\sin x}{2 - \sin x}$, TXĐ = $\mathbb{R}$. Bài toán trở thành tìm y để phương trình $(2 - \sin x)y = \cos x - 2\sin x$ có nghiệm $\Leftrightarrow$

$\cos x + (y - 2)\sin x = 2y$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 + (y - 2)^2 - 4y^2 \ge 0$

$3y^2 + 4y - 5 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{19}}{3} \le y \le \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$

Vậy GTNN $y = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$, GTLN $y = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}$.

e) $y = \frac{2\cos x - \sin x - 1}{2 + \cos x + \sin x}$, TXĐ D = $\mathbb{R}$ (vì $2 + \sin x + \cos x \ne 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Tìm y để phương trình $(2 - y)\cos x - (y + 1)\sin x = 2y + 1$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (2-y)^2 + (y+1)^2 - (2y+1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 - 4y + y^2 + y^2 + 2y + 1 - 4y^2 - 4y - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \leq y \leq \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow$ GTNN $y = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, GTLN $y = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

28. $y = \dfrac{k + \cos x}{2 + \sin x}$, TXĐ $D = \mathbb{R}$ (vì $2 + \sin x \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Bài toán đưa về tìm y để phương trình : $\cos x - y\sin x = 2y - k$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 1 + y^2 - (2y-k)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 4ky - 1 + k^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2k - \sqrt{k^2+3}}{3} \leq y \leq \dfrac{2k + \sqrt{k^2+3}}{3}$

Vậy GTLN $y = \dfrac{2k + \sqrt{k^2+3}}{3} \geq 3 \Leftrightarrow k > 6 + \sqrt{10}$.

29. Làm như bài 28, ta có : max $y = \dfrac{-2+\sqrt{1+3m^2}}{3}$. Theo đầu bài, ta phải có :

$\dfrac{-2+\sqrt{1+3m^2}}{3} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -2 + \sqrt{1+3m^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+3m^2} > 3$

$\Leftrightarrow 1 + 3m^2 > 9 \Leftrightarrow m^2 > \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow |m| > \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

30. Làm như bài 28, ta có : min $y = \dfrac{2k - \sqrt{k^2+3}}{3}$.

Theo đầu bài, ta phải có :

$\dfrac{2k-\sqrt{k^2+3}}{3} < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 2k - 1 < \sqrt{k^2+3} \Leftrightarrow 3k^2 - 4k - 2 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{10}}{3} < k < \dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$.

31. a) $(k+1)\sin x - k\cos x = 2k$ vô nghiệm $\Leftrightarrow (k+1)^2 + k^2 - (2k)^2 < 0$

$-2k^2 + 2k + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} < k < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

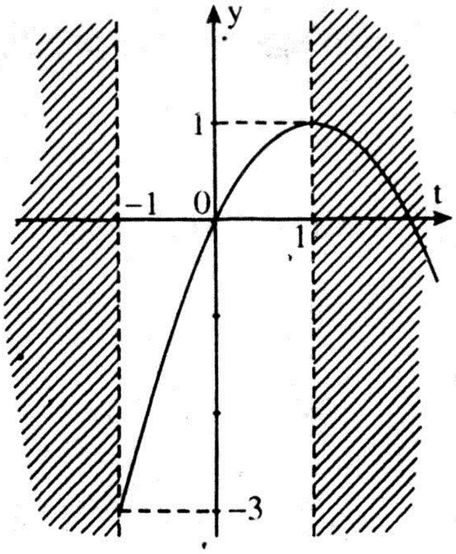
b) Có PT tương đương :

$-\cos^2 x + 2\cos x = 2k - 1$.

Đặt $\cos x = t$ với $|t| \le 1$,

ta có : $-t^2 + 2t = 2k - 1$.

VT là hàm bậc hai mà đồ thị là parabol (Hình 9). VP là đường thẳng song song trục hoành. Căn cứ vào đồ thị ta thấy PT vô nghiệm với $k < -1$ hoặc $k > 1$.



Hình 9

32. Ta có $\sin^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{2}$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$\cos 4x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = -2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\cos 4x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Điều kiện : $|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4$ (*)

* Với $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$. Từ (*) $\Leftrightarrow -2 < -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi < 4 \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}$

Với $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$. Từ (*) $\Leftrightarrow -2 < \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi < 4 \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6}$.

Đáp số : $x = -\dfrac{\pi}{6}$; $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

33. Xét hai trường hợp :

a) $\cos x \ge 0$, có phương trình tương đương : $\sin 3x = -\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = \pi - x + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi & (1) \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2} & (2) \end{array}\right.$$

– Xét nghiệm (1) : do điều kiện $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) \ge 0$ nên chọn

$$x = -\frac{\pi}{4} + m2\pi \ (m \in \mathbb{Z})$$

– Xét nghiệm (2) : do điều kiện $\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)\geq 0$ nên chọn

$$x=\frac{3\pi}{8}+m2\pi \text{ và } x=-\frac{\pi}{8}+m2\pi \ (m\in\mathbb{Z})$$

b) cosx < 0, có phương trình tương đương : sin3x = cosx

$$\Leftrightarrow \sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{2}-x+k2\pi \\ 3x=\frac{\pi}{2}+x+k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}. & (3) \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi & (4) \end{array}\right.$$

– Xét nghiệm (3) : do điều kiện $\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)<0$ nên chọn

$$x=\frac{5\pi}{8}+m2\pi \text{ và } x=\frac{\pi}{8}+(2m+1)\pi$$

– Xét nghiệm (3) : do điều kiện $\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)<0$ nên chọn

$$x=\frac{\pi}{4}+(2m+1)\pi \ (m\in\mathbb{Z})$$

Đáp số : Có các họ nghiệm :

$$x=-\frac{\pi}{4}+m2\pi,\ x=\frac{3\pi}{8}+m2\pi,$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+m2\pi,\ x=\frac{5\pi}{8}+m2\pi \text{ và } x=\frac{\pi}{8}+(2m+1)\pi$$

$$x=\frac{\pi}{4}+(2m+1)\pi \ (m\in\mathbb{Z})$$

34. a) Với k = 2, ta có phương trình :

$$3\cos x+2|\sin x|=2 \Leftrightarrow 3\cos x=2(1-|\sin x|). \quad (1)$$

Do $|\sin x|\leq 1$ nên phải có $\cos x\geq 0$

$$\Leftrightarrow k2\pi-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$(1)\Leftrightarrow 9(1-\sin^2x)=4(1+\sin^2x-2|\sin x|)$$

$$\Leftrightarrow 13\sin^2x-8|\sin x|-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |\sin x|=1 \\ |\sin x|=-\frac{5}{13} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sin x=\pm 1$ (cho cosx = 0 thoả mãn điều kiện)

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) Với $k = 3$, có phương trình : $3\cos x + 2|\sin x| = 3$

$\Leftrightarrow 2|\sin x| = 3(1 - \cos x) > 0$

$\Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 x) = 9(1 + \cos^2 x - 2\cos x)$

$\Leftrightarrow 13\cos^2 x - 18\cos x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = \dfrac{5}{13}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \pm \arccos\dfrac{5}{13} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

35. Đk : $\begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \cot 2x \neq \cos 2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{k\pi}{2}\\ \cos 2x \neq 0\\ \sin 2x \neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{cases}$

$\Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có phương trình tương đương :

$$3\cos 2x + \cot 2x + 2\sin 2x\cos 2x = 0$$

$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0 \text{ (loại theo đk)}\\ 2\sin^2 x + 3\sin 2x + 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = -1 \text{ (loại vì } \cos 2x = 0)\\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{array}\right.$$

36. a) Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (2\sin\alpha - 1)^2 - 4(6\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -4\sin^2\alpha + 1 \geq 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}k2\pi - \dfrac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\\ k2\pi + \dfrac{5\pi}{6} \leq \alpha \leq \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Với điều kiện trên, theo định lí Viet ta có :

$$\begin{cases}x_1 + x_2 = 2\sin\alpha - 1\\ x_1x_2 = 6\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1\end{cases}$$

Vậy $y = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -8\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 3.$

Để cho gọn, đặt $t = \sin\alpha$ và có $y = -8t^2 - 2t + 3$ với $|t| \leq \dfrac{1}{2}$. Hàm y có hệ số t^2 là $-8 < 0$ nên đồ thị Parabol có thể lõm quay xuống dưới và có cực đại khi $t = -\dfrac{1}{8}$ và $\max y = \dfrac{25}{8}$, khi đó

$\sin\alpha = -\frac{1}{8}$ và $\alpha = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + k\pi$ và $\min y = 0$ với

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

37. a) k = 2, có phương trình tương đương :

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = 2\cos x$$

Điều kiện : cosx > 0. Với điều kiện đó, hai vế đều dương, nên bình phương hai vế, có phương trình tương đương :

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \Rightarrow x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{loại do điều kiện} \end{array}\right.$$

b) Điều kiện : kcosx > 0, có phương trình tương đương :

$$k^2\cos^2 x - 2|\cos x| - 2 = 0$$

Từ điều kiện kcosx > 0 cho k ≠ 0, phương trình trên có nghiệm :

$$|\cos x| = \frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \text{ (loại nghiệm } |\cos x| = \frac{1-\sqrt{1+2k^2}}{k^2} < 0\text{)}.$$

Vì phải có $|\cos x| \le 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1+2k^2} \le k^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+2k^2} \le k^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 > 1 \\ 1+2k^2 \le (k^2-1)^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k^2 \ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \le -2 \\ k \ge 2 \end{array}\right..$$

– Với k ≥ 2 thì cosx > 0 và $\cos x = \frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

$$\Rightarrow x = \pm\arccos\frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} + m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

– Với k ≤ –2 thì cosx < 0 và $\cos x = -\frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

$$\Rightarrow x = \pm\arccos\left(-\frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}\right) + m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

38. 1) Có phương trình tương đương :

$$(4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3) + (3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\mathrm{tg}x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$$

2) Đáp số : phương trình vô nghiệm.

39. Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Dùng công thức $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$, phương trình đã cho tương đương :

$$3(\tan^2 x + \cot^2 x) + m(\tan x + \cot x) + 2 = 0$$

Đặt $\tan x + \cot x = t$, phải có điều kiện $|t| \geq 2$ vì từ

$(\tan x - \cot x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\tan x + \cot x)^2 \geq 4 \Leftrightarrow t^2 \geq 4$.

Có phương trình ẩn t tương đương : $3t^2 + mt - 4 = 0$ (*)

Đặt $f(t) = 3t^2 + mt - 4$. Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm là :

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \\ -2 < \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 48 > 0 \\ 8 - 2m > 0 \\ 8 + 2m > 0 \\ -2 < -\dfrac{m}{4} < 2 \end{cases} \Rightarrow |m| < 4$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi $|m| \geq 4$.

40. Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Từ công thức $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ thay vào phương trình đã cho, được :

$$4a\cos^2 x - 2\cos x + 1 - a = 0$$

Đặt $t = \cos x$ với $|t| \leq 1$, ta có phương trình : $4at^2 - 2t + 1 - a = 0$ (*)

a) Với $a = \dfrac{1}{2}$, có phương trình $2t^2 - 2t + \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Để phương trình đã cho có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng $\left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trong khoảng (0 ; 1).

– Với $a = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$ (loại theo trên).

– Với $a \neq 0$. Điều kiện để phương trình (*) có hai nghiệm khác nhau thuộc khoảng $(0 ; 1)$ là :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ a.f(0) > 0 \\ af(1) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ (2a-1)^2 > 0 \\ a(1-a) > 0 \\ a(3a-1) > 0 \\ 0 < \dfrac{1}{4a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \\ 0 < a < 1 \\ a < 0 \vee a > \dfrac{1}{3} \\ a > \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} < a < 1 \end{cases}$$

41. Ta nhận thấy $\cos x \neq 0$ vì nếu $\cos x = 0$ cho $\sin x = 1$ thì vế trái $\neq 0$, vế phải $= 0$ không thoả mãn. Chia cả hai vế có $\cos^3 x \neq 0$ có phương trình tương đương :

$$(4 - 6m)t^3 + 3(2m - 1)\, t\, (1 + t^2) + 2(m - 2)t^2 - (4m - 3)(1 + t^2) = 0$$

với $t = \tan x$ và $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\Leftrightarrow t^3 - (2m + 1)t^2 + 3(2m - 1)\, t + 3 - 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0 \ (*)$$

a) Với $m = 2$, có phương trình : $(t - 1)(t^2 - 4t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

b) Để đoạn $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ chứa đúng một nghiệm phương trình đã cho thì đoạn $[0 ; 1]$ chứa đúng một nghiệm của (*).

Phương trình (1) chắc chắn có nghiệm $t = 1$ cho $x = \dfrac{\pi}{4}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Do đó phương trình :

$$f(t) = t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0 \ (**) \text{ phải :}$$

– hoặc vô nghiệm (1)

– hoặc có nghiệm kép $t = 1$ (2)

– hoặc có nghiệm $t_1 \leq t_2 < 0$ (3)

– hoặc có nghiệm $1 < t_1 \leq t_2$ (4)

– hoặc có nghiệm $t_1 < 0 < 1 < t_2$ (5)

– Xét (1) : $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Rightarrow 1 < m < 3$.

– Xét (2) : $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 2m - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$

– Xét (3) : $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(0) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 \geq 0 \\ 4m - 3 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

– Xét (4) : $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(1) > 0 \\ 1 < \dfrac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 \geq 0 \\ m - 1 > 0 \\ 1 < m \end{cases}$

$\Rightarrow m < 1 \; ; \; m \geq 3.$

– Xét (5) : $\begin{cases} af(0) > 0 \\ af(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 3 < 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow m < \dfrac{3}{4}.$

Đáp số : Để phương trình có đúng một nghiệm $x \in \left[0 \; ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ thì các giá trị của $m \in \left(-\infty \; ; \dfrac{3}{4}\right) \cup (1 \; ; +\infty)$.

42. $y - 1 = \dfrac{3\sin x}{2 + \cos x} \Leftrightarrow (y - 1)(2 + \cos x) = 3\sin x$ phải có nghiệm

$\Leftrightarrow (y - 1)\cos x - 3\sin x = 2(1 - y)$ phải có nghiệm

$\Leftrightarrow (y - 1)^2 + 9 - [2(1 - y)]^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(y - 1)^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow |y - 1| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} + 1$

$\Rightarrow \min y = 1 - \sqrt{3}$, $\max y = 1 + \sqrt{3}$.

43. Điều kiện : $\sin x \geq 0$. Có phương trình tương đương :

$\sqrt{\sin x} + \sin x = 1 - \sin^2 x - \cos x \Leftrightarrow$

$\sqrt{\sin x} + \sin x = \cos^2 x - \cos x \Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin x} + \dfrac{1}{2} = \pm\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{\sin x} + \dfrac{1}{2} = \cos x - \dfrac{1}{2} & (1) \\ \sqrt{\sin x} + \dfrac{1}{2} = -\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k2\pi$

Giải (2) $\Leftrightarrow \sqrt{\sin x} = -\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x = \cos^2 x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \le 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \pi - \text{arc}\sin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + k2\pi.$$

44. $\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos\dfrac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \dfrac{8m\pi}{3} \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z})$

Phải có : $k\pi = \dfrac{8\pi}{3}m \Leftrightarrow 3k = 8m \Rightarrow$ chọn $k = 8n$ và $m = 3n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

Đáp số : $x = 8n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)

45. 1) Đặt $3\cos x + 4\sin x = t$ với đk : $\begin{cases} t \neq -1 \\ |t| \le 5 \end{cases}$

Có phương trình (ẩn t) tương đương : $t + \dfrac{6}{t+1} = 6$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 5 \end{array}\right.$

Với $t = 0 \Rightarrow 3\cos x + 4\sin x = 0 \Leftrightarrow 3\cos x = -4\sin x$

$\Leftrightarrow \cot x = -\dfrac{4}{3}$ (chắc chắn $\sin x \neq 0$)

$\Rightarrow x = \text{arc}\cot\left(-\dfrac{4}{3}\right) + k\pi$

– Với $t = 5 \Rightarrow 3\cos x + 4\sin x = 5 \Leftrightarrow \cos x + \dfrac{4}{3}\sin x = \dfrac{5}{3}$.

Đặt $\dfrac{4}{3} = \tan x$, ta có phương trình tương đương : $\cos x + \tan x \sin x = \dfrac{5}{3}$

$$\cos(x - \alpha) = \frac{5}{3}\cos\alpha.$$

Từ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Và có phương trình tương đương : $\cos(x - \alpha) = \dfrac{5}{3}.\dfrac{3}{5} = 1$

$\cos(x - \alpha) = \cos 0 \Rightarrow x = \alpha + k2\pi$ với $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ và $k \in \mathbb{Z}$.

2) Đặt $|\sin x - \cos x| = t \ge 0 \Rightarrow t^2 = 1 - \sin 2x$.

Có phương trình (ẩn t) tương đương : $4t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1$.

Vậy $\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

46. Có phương trình tương đương :

$$1 + (\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x\cos 2x) = 3\sin 2x\cos 2x$$

Đặt $\sin 2x + \cos 2x = t$ với $|t| \le \sqrt{2}$ $\Rightarrow \sin 2x\cos 2x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, có phương trình tương đương :

$$t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t^2 + 2t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t^2 + 2t - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x + \cos 2x = -1 \\ \text{vô nghiệm vì } |t| > \sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \text{(thoả mãn điều kiện)}$$

47. 1) Điềukiện : $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow x \ne \dfrac{k\pi}{2}$. Có phương trình tương đương :

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x$$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - (\sin x + \cos x)\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - \sin x\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -\sin x & (1) \\ \cos x - \sin x - \sin x\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow \cot x = -1$ (chắc chắn $\sin x \ne 0$) $\Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Giải (2) : Đặt $\cos x - \sin x = t$ (*) với $|t| \le \sqrt{2}$. Đó chính là điều kiện để (*) có nghiệm

Vì $\cos x - \sin x = t \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)^2 = t^2$.

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin x\cos x = t^2 \Leftrightarrow \sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

(2) $\Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \cos x - \sin x = \sqrt{2} - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) $2\sin x + \cot x = 2\sin 2x + 1$ (1) (điều kiện $\sin x \ne 0 \Rightarrow x \ne k\pi$)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 4\sin^2 x\cos x - \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = \cos x(2\sin x + 1)(2\sin x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)[\sin x - \cos x(2\sin x + 1)] = 0$

- $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \neq 0.$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

- $\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x = 0.$

Đặt $\sin x - \cos x = t \Rightarrow -2\sin x\cos x = t^2 - 1$; $|t| \le \sqrt{2}$.

Ta có phương trình : $t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ loại.} \end{array}\right.$

Vậy ta có : $\sin x - \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Vì $\left|\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\right| < 1$ nên đặt $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} = \cos\alpha \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

48. (1) $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x\sin x) = m$

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |t| \le \sqrt{2}.$

$$t\left(t^2 + \frac{3(1-t^2)}{2}\right) - m = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2m = 0$$

1) Khi $m = -1$, ta có :

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} |t| \le \sqrt{2} \\ t^3 - 3t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} \ (k \le \mathbb{Z}).$$

2) $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (*).

Với mỗi $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ thì $t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$ và ngược lại mỗi $t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$ có đúng một $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ thoả mãn (*).

Vậy (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2m = 0$ (**) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \sqrt{2}\right]$.

Từ (**) $\Leftrightarrow 2m = -t^3 + 3t$.

Xét $f(t) = -t^3 + 3t$ với $t \in \left[0 ; \sqrt{2}\right]$ có $f'(t) = -3t^2 + 3$, ta có bảng biến thiên

t		-1		0		1		$\sqrt{2}$
f'(t)	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f(t)				0	↗		↘	$\sqrt{2}$

Từ đó ta có điều kiện phải tìm : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$.

49. 1) a) Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$

Có phương trình tương đương : $1 = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\tan 2x$. (1)

Điều kiện tiếp theo : $\tan^2 x \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

(1) $\Leftrightarrow \tan^2 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$

b) $\sin 4x = 1 + \cos 2x - 1 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right) = \cos 2x$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - 4x = \pm 2x + k2\pi \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} - 4x = 2x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{2} - 4x = -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

c) $2(2\cos^2 x)^2 = 1 + \cos 4x \Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x)^2 = 2\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x = \cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$

$\cos 2x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

2) a) $1 + \cos 2x + \sin x = 1 + \cos x \Leftrightarrow \cos 2x - \cos x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2} + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} = \sin\dfrac{3x}{2} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ \cos\dfrac{x}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3x}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ \dfrac{x}{2} = \pm\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3x}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \end{array}\right. \text{ và } x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b) $\dfrac{1-\cos 4x}{2} + \dfrac{1-\cos 8x}{2} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -\cos 4x = 1 + \cos 8x$

$$\Leftrightarrow -\cos 4x = 2\cos^2 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 4x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

c) Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$

Có phương trình tương đương :

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \sin 3x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \dfrac{1}{\cos x \cos 2x} = \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ \cos^2 x \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ \dfrac{1 + \cos 2x}{2}\cos 2x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

50. 1) (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

Với điều kiện $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

(1) $\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\cos^2 x = 4\sin x\cos x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin 2x) = 0$

* $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

* $\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} & (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

* Với $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \neq k\frac{\pi}{2}$ nên $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ thoả mãn điều kiện bài toán.

* Với $x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, ta có $\sin 2x = \sin\left(\frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} = l\pi \Leftrightarrow 4\pi + k6\pi = 9l\pi \Leftrightarrow 4 = 9l - 6k$ (*).

Không có k, l thoả mãn (*) vì 4 không chia hết cho 3 nên

$$x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$$

luôn thoả mãn điều kiện $\sin 2x \neq 0$.

2) a) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x + \sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos x)(\sin x + 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) & \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

b) $\sin 4x = \tan x$ (điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos 2x \neq -1$)

$\Leftrightarrow \sin x\left(4\cos x \cos 2x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x(4\cos^2 x \cos 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0 \\ 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 1 & \text{(thoả mãn điều kiện)} \\ \cos 2x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} & \text{(vô nghiệm)} \\ \cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} & \text{(thoả mãn điều kiện)} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = k\pi,\ x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$, $\cos\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$).

51. 1) Điều kiện : $\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} \neq 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq k\pi.$

Biến đổi :

$$\text{Vế trái} = \sin^6\frac{x}{2} + \cos^6\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^6\frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^6\frac{x}{2}} + 4 =$$

$$= \left[\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)^3 - 3\sin^2\frac{x}{2}\cos 2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)\right] \times$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{\sin^6\frac{x}{2}\cos^6\frac{x}{2}}\right) + 4 = \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 x\right)\left(1 + \frac{64}{\sin^6 x}\right) + 4$$

$$\geq 4 + \left(1 - \frac{3}{4}\right)(1 + 64) \geq \frac{81}{4}$$

Vế phải $= \dfrac{81}{4}\cos^2 4x \leq \dfrac{81}{4}$. Suy ra :

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = -1 \\ (2\cos^2 2x - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1$$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

2) Có phương trình tương đương :

$$\sin 4x + 4(\cos x - \sin x) - (1 + \cos 4x) = 0$$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x + 4(\cos x - \sin x) - 2\cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\sin 2x - \cos 2x) + 4(\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2(\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2] = 0$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos x = \sin x & (1) \\ \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow x = 1$ (chắc chắn $\cos x \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$)

Giải (2) : Vì $\left|\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leq 1$ và $\left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leq 1$ nên nghiệm của (2)(nếu có) phải là nghiệm của một trong các hệ :

$$\begin{cases} \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

Bạn đọc tự giải sẽ thấy cả hai hệ đều vô nghiệm nên (2) vô nghiệm.

52. 1) Điều kiện : $\begin{cases}\sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0\end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$. Có phương trình tương đương :

$$3(\cot x - \cos x + 1) - 5(\tan x - \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\cos x - \sin x\cos x + \sin x}{\sin x} - 5\frac{\sin x - \sin x\cos x + \cos x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x\cos x + \sin x)\left(\frac{3}{\sin x} - \frac{5}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x - \sin x\cos x + \sin x = 0 & (1) \\ \dfrac{3}{\sin x} = \dfrac{5}{\cos x} & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1) : đặt $\cos x + \sin x = t$ với $|t| \leq 2 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 1 - \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z}, \cos\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$

$(2) \Leftrightarrow \tan x = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \varphi + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z}, \tan\varphi = \frac{3}{5})$

2) Đáp số : $x = k\frac{\pi}{2}$.

53. 1) Điều kiện : $\cos x\alpha \neq 0$ (kéo theo $\sin x \neq \pm 1$) $\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Có phương trình tương đương :

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

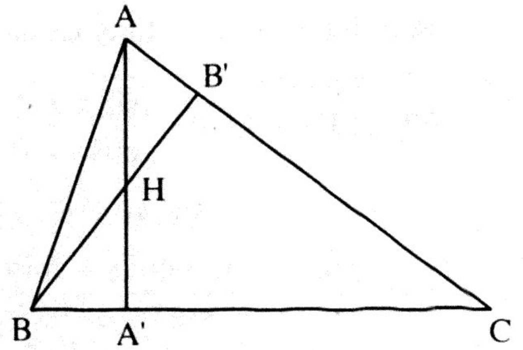
$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \sin x} = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 + \cos x = 0 \\ 1 - \cos x = 1 + \sin x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1 \\ \tan x = -1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x. = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Ta có $\tan B.\tan C = \frac{AA'}{A'B'}.\frac{AA'}{A'C}(*)$

$\Delta A'BH \backsim \Delta A'AC \Rightarrow BA'.\ CA' = AA'.\ HA'.$



Hình 10

Thay vào (*) :

$$\tan B.\tan C = \frac{AA'}{HA'} = \frac{AH + HA'}{HA'}$$

$$= \frac{AH}{HA'} + 1 = m + 1$$

Do A, B, C là ba góc của ΔABC nên ta có :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$$

$\Leftrightarrow \tan B + \tan C = \tan C\,(\tan B\tan C - 1) \Leftrightarrow \tan B + \tan C = m\tan A.$

Lại có $\tan B\tan C = m + 1$ nên tanB và tanC là nghiệm của phương trình :

$x^2 - xm\tan A + m + 1 = 0,\ \Delta = m^2\tan^2 A - 4(m + 1) \geq 0 \Rightarrow \tan A \geq \dfrac{2\sqrt{m+1}}{m}.$

Vì ΔABC có các góc nhọn nên $\tan A > 0 \Rightarrow m > 0$.

54. a) Thay $-\sqrt{3} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, ta có phương trình tương đương :

$$\sin x - \tan\frac{\pi}{3}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \leq \mathbb{Z}).$$

b) (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow 1 + m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 0$.

Không có giá trị nào của m để $m^2 < 0$.

Do đó không có giá trị nào của m để (1) vô nghiệm.

c) Lấy một nghiệm của (1), chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$, thay vào (2) được

$$m = m^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

– Với m = 0, (1) $\Rightarrow$ sinx = 1, (2) $\Rightarrow$ cosx = 0. Rõ ràng nghiệm của (1) là nghiệm của (2).

– Với m = 1, (1) và (2) đều thành sinx + cosx = 1 và có nghiệm như nhau.

55. 1) PT : $\tan^4 x + 1 = \tan^4 x + 1 = \dfrac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$

Đk : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

PT $\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x)\sin 3x$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\sin 3x \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)(1-2\sin 3x)=0$

$\Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2}$ (do $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \neq 0$) dễ thấy thoả mãn điều kiện.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

2) Đk : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \begin{cases} x \neq k\pi & (k\in\mathbb{Z}) \\ x \neq \frac{\pi}{2}+l\pi & (l\in\mathbb{Z}) \\ x \neq -\frac{\pi}{4}+m\pi & (m\in\mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq n\frac{\pi}{2} \ (n\in\mathbb{Z}) \\ x \neq -\frac{\pi}{4}+m\pi \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$\frac{\cos x}{\sin x}-1 = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}+\sin x(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x} = \cos x(\cos x-\sin x)+\sin x(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1-\sin x\cos x+\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x-\sin x = 0 \\ 1-\sin x\cos x+\sin^2 x = 0 \end{array}\right.$$

- $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ thoả mãn (1).
- $1-\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x = 0$ vô nghiệm. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$x = \frac{\pi}{4}+k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

56. a) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$. Có phương trình tương đương :

$$\sin x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = \cos x \Leftrightarrow \sin x-\cos x = \sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Hàm y được xác định với mọi giá trị của x khi và chỉ khi :

$\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cos x \geq 0$ với mọi x (1)

$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3+a\sin x\cos x \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x\cos^2x) + a\sin x\cos x \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 3\sin^2x\cos^2x + \frac{1}{2}a\sin 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{2}a\sin 2x \geq 0$

Đặt $\sin 2x = t$ với $|t| \leq 1$, ta có :

$$-\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}at + 1 \geq 0 \text{ với mọi } t \in [-1\ ;\ 1]$$

$\Leftrightarrow f(t) = 3t^2 - 2at - 4 \leq 0$ với mọi $t \in [-1\ ;\ 1]$ (2)

Bài toán trở thành : Tìm a để khoảng nghiệm của bất phương trình (2) chứa khoảng $(-1\ ;\ 1)$ nghĩa là f(t) phải có hai nghiệm khác nhau và hai số $-1\ ;\ 1$ phải nằm trong khoảng hai nghiệm đó, nghĩa là ta phải có :

$$\begin{cases} 3f(-1) \leq 0 \\ 3f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 \leq 0 \\ 2a + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

57. Có phương trình tương đương :

$$\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ (loại theo điều kiện đó)}$$

Đáp số : Phương trình vô nghiệm.

58. Đáp số : $\left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{4} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \varphi + k\pi & (\tan\varphi \in -2) \end{array}\right.$

59. $(\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x)$

$$= a\left[(\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x\right]$$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) \Leftrightarrow (2a - 3)\sin^2 2x = 4(a - 1).$

– Nếu $2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$ phương trình vô nghiệm

– Nếu $2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$. Phương trình vô nghiệm

Vì $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{4(a-1)}{2a-3} \leq 1.$

$\Leftrightarrow (a - 1)(2a - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq 1.$

– Với $a = \frac{5}{6}$, ta có phương trình :

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

60. $2\cos^2x + \sin^2x + b\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos+2+x + b\cos x + 1 = 0$ (1)

a) $b = 2$, có phương trình :

$\cos^2x + 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k2\pi$.

b) Vì $|\cos x| \le 1$ nên muốn (1) có nghiệm thì $\Delta \ge 0$ và nghiệm của (1) phải thuộc đoạn $[-1 ; 1]$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow b \le -2 ; 2 \le b$.

Theo (1) thì tích hai nghiệm luôn luôn bằng 1, chứng tỏ một trong các nghiệm của (1) bao giờ cũng thuộc đoạn $[-1 ; 1]$ luôn luôn có nghiệm trong đoạn $[-1 ; 1]$.

Đáp số : $b \le -2 ; 2 \le b$.

61. $2\cos^2x + m\cos x + 3 \ge 0$. Đặt $\cos x = t$ với $|t| \le 1$, ta có

$$f(t) = 2t^2 + mt + 3 \ge 0 \qquad (1)$$

với mọi $|t| \le 1$ thì phải có :

– hoặc $\Delta \le 0 \Rightarrow m^2 - 24 \le 0 \Leftrightarrow |m| \le \sqrt{24}$ (đpcm)

– hoặc $\Delta > 0$ nhưng đoạn $[-1 ; 1]$ phải nằm ngoài khoảng chứa hai nghiệm của (1), nghĩa là phải có điều kiện :

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ f(-1) \ge 0\\ f(1) \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{6} ;\ 2\sqrt{6} < m\\ 5 - m \ge 0\\ 5 + m \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -5 \le m \le -2\sqrt{6} \vee 2\sqrt{6} < m \le 5$$

Kết hợp cả hai trường hợp ta được : Đáp số : $|m| \le 5$.

62. 1) Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \ne 0\\ \tan x \ne -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x \ne -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{cases}$

Có phương trình tương đương :

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \Leftrightarrow \tan x(\tan^2x + \tan x + 2) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi.$$

2) Điều kiện : $\cos x \ne 0 \Rightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Từ các công thức :

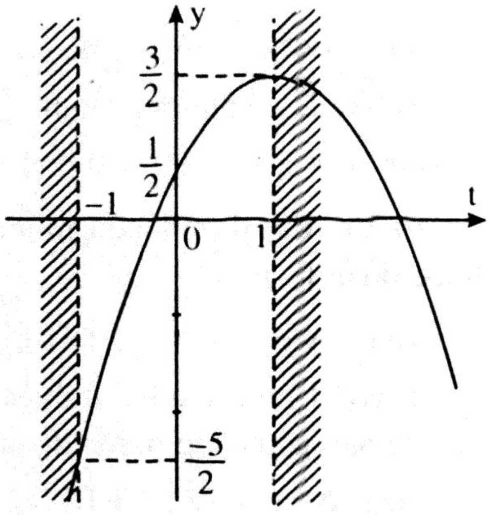
$$1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x \text{ và } \sin 2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 + \mathrm{tg}^2x}$$

có phương trình tương đương : $-\sin^2 2x + 2\sin 2x + \dfrac{1}{2} = m$.

Đặt $\sin 2x = t$ với $|t| \le 1$ và từ điều kiện đầu bài cho $\sin 2x \ne 0 \Rightarrow t \ne 0$.
Ta có :

$$-t^2 + 2t + \frac{1}{2} = m \quad (1)$$

Vế trái là đồ thị hàm bậc hai, ta vẽ được bằng cách xác định đỉnh Đ$\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$, điểm đồ thị cắt trục tung T $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$, các điểm $\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(-1\,;-\dfrac{5}{2}\right)$.



Hình 11

Vế phải là một đường thẳng song song với trục hoành.

Căn cứ vào đồ thị (Hình 11), ta thấy : để phương trình (1) vô nghiệm thì

$$m < -\frac{5}{2}\ ;\ m \neq 0\ ;\ \frac{3}{2} < m$$

63. Có phương trình tương đương:

$$9\sin x + \cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x(1 - \sin x) - (2\sin^2 x - 9\sin x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\sin x + 6\cos x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2\sin x + 6\cos x = 7 \text{ vô nghiệm.} \end{cases}$$

64. Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Có phương trình tương đương :

$$2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

65. $4\sin^2 3x\sin^2 x = 4 + 2(1 + \sin 3x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 3x\sin^2 x = 4 \\ 4 + 2(1 + \sin 3x) = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 3x\sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ ((k \in \mathbb{Z})$$

66. Điều kiện : $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$, ta có phương trình tương đương :

$$\sin 5x = 5\sin x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 4\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x\sin 2x = 4\sin x \Leftrightarrow 4\cos 3x\sin x\cos x = 4\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x\cos x = 1 \text{ (vì } \sin x \neq 0)$$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x + 1 + \cos 4x = 3$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1$

$\Rightarrow x = k\pi$ (loại so với điều kiện). Vậy phương trình vô nghiệm.

67. $\cos x(\cos x + \cos 2x) - \sin x(\cos x - \cos 2x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos 2x\cos x + \cos 2x\sin x - 1 - \sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + \sin x) - \sin x(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\sin x \\ \cos 2x = \sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cot x = -1 & \text{(chắc chắn } \sin x \neq 0) \\ \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \quad \text{và} \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{array}\right.$$

68. Sử dụng công thức hạ bậc, sử dụng công thức biến tổng thành tích ta có phương trình tương đương :

$$\cos 10x(\cos 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Do nghiệm thuộc khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ nên có các nghiệm

$$x = \frac{\pi}{20}, \frac{3\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}.$$

69. Sử dụng công thức nhân đôi, nhân ba, ta có phương trình tương đương

$$\cos x[4\cos^2 x - 2\cos x + (m - 3)] = 0 \ (1)$$

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right)$ thì $x = \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}$

* $4\cos^2 x - 2\cos x + (m - 3) = 0 \qquad (2)$

Đặt $t = \cos x$, $|t| \leq 1$, khi đó (2) trở thành

$$\begin{cases} f(t) = 4t^2 - 2t + (m - 3) = 0 \\ |t| \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Muốn (1) có 7 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ thoả mãn $-1 < t_1 < 0, 0 < t_2 < 1 \qquad (4)$

Để có (4) cần có $\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3$

70. 1) Chuyển hàm số sin sang vế phải, cosin sang vế trái, đặt thừa số chung ta có phương trình tương đương :

$$\cos 2x\left[\underbrace{\cos^8 x + \frac{5}{4} - 8\sin^8 x}_{>0}\right] = 0$$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) Biến đổi vế trái thành $4|\cos x|$, phương trình đã cho tương đương với :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0 \\ 2\cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x - 2) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ 2\cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

71. a) Để viết một số có 6 chữ số, có 6 cách chọn số hàng trăm nghìn. Tương tự, với mỗi hàng còn lại đều có 6 cách chọn. Theo quy tắc nhân có $6^6 = 46656$ số.

b) Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn, 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn, 4 cách chọn chữ số hàng nghìn..., 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị. Có tất cả $6! = 720$ số.

(có thể xem các số viết được là một hoán vị của 6 phần tử)

c) Lập luận tương tự câu a), có $6^4 = 1296$ số.

d) Lập luận tương tự câu b), có $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ số (hoặc dùng công thức $A_6^4 = 360$).

72. a) Gọi $\overline{abc}$ là số thoả mãn đề bài.

$\overline{abc} \ \vdots\ 5$ nên $C = 5$. Các chữ số a, b được chọn trong 5 chữ số còn lại. Vậy có tất cả $A_5^2 = 20$ số.

b) Chữ số hàng đơn vị phải là 1, 3, 5 : có 3 cách chọn. Phần còn lại được coi là một hoán vị của 5 chữ số còn lại : P_5 cách chọn.

Vậy có tất cả $3 \times P_5 = 3 . 5! = 360$ số.

c) Gọi số đó là $\overline{abcd}$.

Vì $\overline{abcd} > 3000$ nên $a \geq 3$ hay $a \in \{3, 4, 5, 6\}$: có 4 cách chọn a. Phần còn lại được coi như các chỉnh hợp chập 3 của 5 chữ số còn lại.

Vậy có $4 \times A_5^3 = 240$ số.

d) $\overline{abc} \geq 243$ nên $a \geq 2$. Vậy $a \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$

+ Với $a = 2$, để $\overline{2bc} \geq 243$ thì $b \geq 4$ hay $b \in \{4, 5, 6\}$.

Nếu $b = 4$ thì $c \geq 3$, có 3 cách chọn c. Vậy có 3 chữ số dạng $\overline{24c}$.

Nếu $b = 5, 6$ thì c có thể chọn bất kì trong 4 số còn lại. Vậy có 8 số dạng $\overline{25c}$ hoặc $\overline{26c}$.

+ Với $a = 3 ; 4 ; 5 ; 6$ có thể chọn b, c là 2 số bất kì trong 5 số còn lại sau khi chọn a. Có tất cả $4.\ A_5^2 = 80$ số.

Tóm lại, lập được $3 + 8 + 80 = 91$ số.

e) Từ 6 số đã cho lập được tất cả $A_6^3 = 120$ số có 3 chữ số khác nhau. Vậy có tất cả $120 - 91 = 29$ số.

73. a) Là số tổ hợp chập 5 của 40 phần tử

$C_{40}^5 = 658008$ (cách).

b) Số cách chọn 3 nam : C_{25}^3

Số cách chọn 2 nữ : C_{15}^2.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn tổ 5 người là

$C_{25}^3.C_{15}^2 = 241500$ (cách).

c) *Cách 1* :

Số cách chọn tổ gồm 2 nữ, 3 nam : $C_{15}^2.C_{25}^3 = 241500$ (1)

Số cách chọn tổ gồm 3 nữ, 2 nam : $C_{15}^3.C_{25}^2 = 136500$ (2)

Số cách chọn tổ gồm 4 nữ, 1 nam : $C_{15}^4.C_{25}^1 = 34125$ (3)

Số cách chọn tổ gồm 5 nữ : $C_{15}^5 = 3003$ (4)

Tổng số cách chọn là : (1) + (2) + (3) + (4) = 415128 (cách)

Cách 2 :

Số cách chọn tổ có 1 nữ là : $15.\ C_{25}^4$

Số cách chọn tổ chỉ có nam là : C_{25}^5

Số cách chọn phải tìm là $C_{40}^5 - \left(15C_{25}^4 + C_{25}^5\right)$.

d) Có 15 cách chọn tổ trưởng nữ. Bốn tổ viên được chọn từ 39 học sinh còn lại: có $C_{39}^4 = 82251$ (cách)

Vậy có : $15.\ C_{39}^4 = 1233765$ (cách).

74. (a) Có 25 cách chọn tổ trưởng nam.

Bốn người còn lại trong tổ gồm :

+ 2 nam, 2 nữ : Có $C_{24}^2.C_{15}^2 = 28980$ (cách)

+ 3 nam, 1 nữ : Có $C_{24}^3.C_{15}^1 = 30360$ (cách)

+ 4 nam : Có $C_{24}^4 = 10626$ (cách)

Vậy có tất cả 25 (289080 + 30360 + 10626) = 1749150 (cách).

b) Một tổ trưởng và một tổ phó có thể coi là một chỉnh hợp chập 2 của 40 học sinh trong lớp (A_{40}^2) . Ba tổ viên được coi là một tổ hợp chập 3 của 38 học sinh còn lại.

Vậy có tất cả $A_{40}^2.C_{38}^3 = 13160160$ (cách).

c) Mỗi tổ là một chỉnh hợp chập 5 của 40 phần tử.

Vậy có $A_{40}^5 = 78960960$ cách.

75. a) Gọi số phải tìm là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$

– Có 4 cách chọn a

– Các chữ số còn lại là hoán vị của 4 chữ số 4 ! cách chọn

Theo quy tắc nhân có 4 . 4 ! = 96 (số).

b) Có $4 \times 5^4 = 2500$ (số).

c) Số phải viết $\overline{abc}$. Có 4 cách chọn a. Các chữ số còn lại là các chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử. $A_4^2 = 12$ cách chọn. Vậy có tất cả 4 × 12 = 48 (số).

d) Số phải viết là $\overline{abc}$. Vì $c \in \{1 ; 3\}$, có 2 cách chọn c. Do $a \neq 0$, nên có 3 cách chọn a. Còn lại 3 cách chọn b. Vậy có tất cả 2 × 3 ×3 = 18 (số)

e) Số phải viết là $\overline{abc}$.

+ Nếu 2 ở vị trí của a thì có $A_4^2 = 12$ cách chọn 2 chữ số còn lại.

+ Nếu 2 ở vị trí của b (hoặc c) thì còn 3 cách chọn a, 3 cách chọn c (hoặc b): có 9 số mỗi loại.

Vậy có : 12 + 9 + 9 = 30 (số).

76. Có 7 cách chọn tổ trưởng nam. Có 5 cách chọn thủ quỹ nữ. Có C_{10}^3 cách chọn chuyên viên. Có tất cả $7 \times 5 \times C_{10}^3 = 4.200$ cách phân công.

77. a) Có $C_5^4 = 5$ cách chọn 4 viên bi cùng đỏ

$C_6^4 = 15$ cách chọn 4 viên bi cùng xanh

$C_7^4 = 35$ cách chọn 4 viên bi cùng vàng

Vậy có 5 + 15 + 35 = 55 cách chọn 4 viên bi cùng màu.

b) Số cách chọn ra 4 viên bi tuỳ ý từ 18 viên bi trong hộp là C_{18}^4.

Có 3 trường hợp chọn 4 viên bi đủ 3 màu :

+ 2 bi đỏ, 1 bi xanh, 1 bi vàng : $C_5^2.C_6^1.C_7^1$

+ 1 bi đỏ, 2 bi xanh, 1 bi vàng : $C_5^1.C_6^2.C_7^1$

+ 1 bi đỏ, 1 bi xanh, 2 bi vàng : $C_5^1.C_6^1.C_7^2$

Suy ra số khả năng chọn 4 viên bi không đủ 3 màu là :

$$C_{18}^4 - \left(C_5^2.C_6^1.C_7^1 + C_5^1.C_6^2.C_7^1 + C_5^1.C_6^1.C_7^2\right) = 1485.$$

78. a) Điều kiện $x \in \mathbb{N}$; $x \geq 4$. PT tương đương với

$$\frac{(x-1)!}{3!(x-4)} - \frac{(x-1)!}{2!(x-3)} = \frac{2(x-2)!}{3(x-4)!}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 9 & \text{(nhận)} \\ x = 2 & \text{(loại).} \end{array}\right.$$

b) Điều kiện $x \in \mathbb{N}$; $x \geq 3$. PT tương đương với

$$\frac{x!}{(x-1)!} + \frac{x!}{2(x-2)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} = \frac{7x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4.$$

c) Điều kiện $x \in \mathbb{N}$; $x \geq 1$. PT tương đương với

$$\frac{(x-1)!}{x!} - \frac{2(x-1)!}{(x+1)!} = \frac{7(x+3)!}{6(x+4)!}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 8. \end{array}\right.$$

d) Điều kiện $x \in \mathbb{N}$; $y \in \mathbb{N}$; $2 \leq y \leq x$. Hệ PT tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{5x!}{(y-2)!(x-y+2)!} = \dfrac{3x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x-y+2} = \dfrac{3}{y-1} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

e) Bất PT tương đương với :

$$\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} < 8 \quad (n \geq 2 ; n \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 5. \end{array}\right.$$

79. a) Số hạng chứa x^3 trong khai triển của $(2x + 1)^3$ là $8x^3$.

Số hạng chứa x^3 trong khai triển của $(3x + 1)^4$ là

$$C_4^1(3x)^3 = 108x^3$$

Số hạng chứa x^3 trong khai triển của $(x + 1)^7$ là :

$$C_7^4x^3 = 35x^3$$

Vậy hệ số của x^3 trong P(x) là $8 - 108 + 35 = -65$

b) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kx^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kx^{n-2k}$

Theo giả thiết : $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 = 28 \quad (n \geq 2)$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 54 = 0$

$\Leftrightarrow n = 9$

Số hạng thứ 5 của khai triển là : $(-1)^4C_9^4x^{9-2.4} = 126x$.

c) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum\limits_{k=0}^{10}(-1)^kC_{10}^k(2x)^{10-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{10}(-1)^k2^{10-k}C_{10}^kx^{10-2k}$$

Số hạng không chứa x tương ứng với $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$

Số hạng cần tìm là : $(-1)^5 . 2^5 . C_{10}^5 = -8064$.

d) Khai triển của $(x^3 + xy)^{15}$ gồm 16 hạng tử

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$C_{15}^k(x^3)^{15-k}(xy)^k = C_{15}^kx^{45-2k}y^k$$

+ Hai hạng tử chính giữa là hạng tử thứ 8 và thứ 9.

$$C_{15}^7x^{45-2.7}y^7 = 6435x^{31}y^7$$

$$C_{15}^8x^{45-2.8}y^8 = 6435x^{29}y^8$$

+ Hạng tử chứa $x^{21}y^{12}$ ứng với $k = 12$. Hệ số của nó là 455.

80. a) Có 8! cách xếp.

b) Nếu nam ngồi ở các ghế đánh số lẻ thì nữ ngồi ở các ghế còn lại. Có 4! cách xếp nam, 4! cách xếp nữ : cả thảy có $(4!)^2$ cách xếp. Tương tự, có $(4!)^2$ cách xếp nam ở các ghế đánh số chẵn, nữ ở các ghế lẻ.

Có tất cả $2(4!)^2$ cách xếp nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

c) Các bạn nữ được xếp ngồi liền nhau ở các ghế từ k đến k + 3 (k = 1, 2, 3, 4). Trong mỗi trường hợp có $(4!)^2$ cách xếp. Rút cục có $4(4!)^2$ cách xếp mà nữ ngồi cạnh nhau.

81. a) Có 6! cách xếp.

b) Xếp nghệ sĩ ngồi giữa 2 bác sĩ. Có 2 cách xếp. Coi nhóm này là 1 phần tử hoán vị vòng quanh với 4 nhà giáo.

Có tất cả 2.4! cách xếp = 48 cách xếp.

c) Đầu tiên chọn 2 nhà giáo, sau đó xếp nghệ sĩ vào giữa. Có A_4^2 cách xếp. Coi mỗi nhóm này là 1 phần tử hoán vị vòng quanh với 4 người còn lại. Có tất cả $A_4^2.4! = 288$ cách.

82. a) Có $C_{15}^3 = 455$ tam giác.

b) Có C_{15}^2 đoạn thẳng nối các đỉnh

Số các đường chéo là $C_{15}^2 - 15 = 90$.

83. a) $\Omega = \{\, i \mid 1 \le i \le 6 \,\}$; $N(\Omega) = 6$.

b) $A = \{\, i \mid i = 1, 3, 5 \,\}$; $N(A) = 3$; $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{\, i \mid i = 1, 2, 3, 4 \,\}$; $N(B) = 4$; $P(B) = \dfrac{2}{3}$

$C = \{\, i \mid i = 1, 3 \,\}$; $N(C) = 2$; $P(C) = \dfrac{1}{3}$.

84. Trong hộp có 18 viên bi đồng chất, kích thước như nhau. Kí hiệu

A : "Bi trắng được rút ra" ; $P(A) = \dfrac{5}{18}$

B : "Bi đỏ được rút ra" ; $P(B) = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$

C : "Bi xanh không được rút ra" ; $P(C) = \dfrac{15}{18} = \dfrac{5}{6}$.

85. $N(\Omega) = C_{11}^4$. Kí hiệu

A : "Cả 4 đều là nữ" ; $N(A) = C_6^4$; $P(A) = \dfrac{C_6^4}{C_{11}^4} = \dfrac{1}{22}$.

B : "Có đúng 3 nữ" ; $N(B) = 5.\ C_6^3 = 20$; $P(B) = \dfrac{20}{C_{11}^4} = \dfrac{2}{33}$

C : "Có ít nhất 1 nữ" $\Rightarrow \overline{C}$: "Cả 4 là nam" ; $N(\overline{C}) = C_5^4$; $P(\overline{C}) = \dfrac{C_5^4}{C_{11}^4}$

Vậy $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \dfrac{65}{66}$.

86. a) $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \le i, j \le 6\}$; $N(\Omega) = 6^2 = 36$.

b) • $A = \{(i, j) \mid i \ne j\}$; $N(A) = 6.5 = 30$; $P(A) = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$

• $B = \{(i, j) \mid i + j > 9\} = \{(i, j) \mid i + j = 10, 11, 12\}$
$= \{(4, 6) ; (6, 4) ; (5, 5) ; (5, 6) ; (6, 5) ; (6, 6)\}$

$N(B) = 6$; $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

• $C = \{(4, j) \mid 1 \le j \le 6\} = \{(4, 1) ; (4, 2) ; (4, 3) ; (4, 4) ; (4, 5) ; (4, 6)\}$

$N(C) = 6$; $P(C) = \dfrac{1}{6}$.

• D = {(3, 1) ; (1, 3) ; (3, 2) ; (2, 3) ; (3, 3) ; [illegible], 4) ; (4 [illegible] ; (3, 5) ; (5, 3) ; (3, 6) ; (6, 3)}

$N(D) = 11$; $P(D) = \dfrac{11}{36}$.

87. $\Omega = \{(i, j, k) \mid 1 \le i, j \le 6\}$; $N(\Omega) = 6^3 = 216$

a) $A = \{(i, j, k) \mid i + j + k = 8\}$

Có bộ ba số 1, 2, 5 và các hoán vị của nó : 6 trường hợp
Có bộ ba số 1, 3, 4 và các hoán vị của nó : 6 trường hợp
Có bộ ba số (1, 1, 6), (1, 6, 1), (1, 1, 6) : 3 trường hợp
Có bộ ba số (2, 2, 4), (2, 4, 2), (4, 2, 2) : 3 trường hợp
Có bộ ba số (2, 3, 3), (3, 3, 2), (3, 2, 3) : 3 trường hợp

$N(A) = 21$

$P(A) = \dfrac{21}{216} = \dfrac{7}{72}$

b) Dựa kết quả trên : $N(B) = 18$; $P(B) = \dfrac{18}{216} = \dfrac{1}{12}$

88. $\Omega = \{(i, j, k, l, m) \mid 1 \le i, j, k, l, m \le 6\}$; $N(\Omega) = 6^5$

a) Gọi A là biến cố "ít nhất xuất hiện 1 lần mặt 5 chấm"

Vậy $\overline{A}$ là biến cố "không lần nào xuất hiện mặt 5 chấm"

$$N(\overline{A}) = 5^5 \; ; \; P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Suy ra $$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

b) B là biến cố xuất hiện 5 mặt chấm bằng nhau.

$$N(B) = 6.$$

$$P(B) = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4}.$$

89. HS tự làm

90. a) Ω là các chỉnh hợp chập 3 của các số 1, 2, 3, 4, 5

$$N(\Omega) = A_5^3 = 60.$$

b) • A là tập hợp các số có dạng $\overline{ab2}$ với a, b $\in \{1, 3, 4, 5\}$ và $\overline{ab4}$ với a, b $\in \{1, 2, 3, 5\}$

$$N(A) = 2A_4^2 = 24$$

$$P(A) = \frac{2}{5}.$$

• B là các hoán vị của 3 số có tổng là 9 trong các số 1, 2, 3, 4, 5 đó là các bộ ba số (1, 3, 5) và (2, 3, 4)

$$N(B) = 2.3! = 12 \; ; \; P(B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

91. Kí hiệu

$đ_1$: quả cầu đen trong hộp thứ nhất
$đ_2$: quả cầu đen trong hộp thứ hai
v_1 : quả cầu vàng trong hộp thứ nhất
v_2 : quả cầu vàng trong hộp thứ hai
t_1 : quả cầu trắng trong hộp thứ nhất
t_2 : quả cầu trắng trong hộp thứ hai

$\Omega = \{(đ_1, đ_2), (đ_1, v_2), (đ_1, t_2), (v_1, v_2), (v_1, đ_2), (v_1, t_2), (t_1, t_2), (t_1, v_2), (t_1, đ_2)\}$

$N(\Omega) = 9$

$A = \{(đ_1, đ_2), (v_1, v_2), (t_1, t_2)\}$

$N(A) = 3 \; ; \; P(A) = \frac{1}{3}$

$B = \{(t_1, t_2)\} \; ; N(B) = 1 \; ; \; P(B) = \frac{1}{9}$

$C = \{(đ_1, đ_2), (đ_1, v_2), (đ_1, t_2)\}$

$N(C) = 3 \; ; \; P(C) = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{(t_1, t_2)\} \; ; N(A \cap B) = 1 \; ; \; P(A \cap B) = \frac{1}{9}$

$A \cup B = \{(đ_1, đ_2),(v_1, v_2),(t_1, t_2)\} = 3 \; ; P(A \cup B) = \frac{1}{3}$

$B \cap C = \varnothing \; ; P(B \cap C) = 0.$

92. $N(\Omega) = 12!$

a) Gọi A là biến cố "nam nữ ngồi xen kẽ nhau"

$$N(A) = 2.(6!)^2$$

$$P(A) = \frac{2.(6!)^2}{12!} = \frac{1}{462}.$$

b) Gọi B là biến cố "nữ ngồi liền nhau"

$$N(B) = 6.(6!)^2$$

$$P(B) = \frac{6.(6!)^2}{12!} = \frac{1}{154}.$$

93. a) $N(\Omega) = 11!$

Gọi A là biến cố "nam, nữ ngồi xen kẽ"

$$N(A) = 5!\,6!$$

$$P(A) = \frac{5!\,6!}{11!} = \frac{1}{462}.$$

b) $N(\Omega) = 9!$

Gọi B là biến cố "không có 2 nữ ngồi cạnh nhau"

$$N(B) = 5!\ A_6^4$$

$$P(B) = \frac{5!\ A_6^4}{11!} = \frac{1}{924}$$

94. $N(\Omega) = 36$

Gọi A là biến cố "Tổng số chấm của 2 lần gieo lớn hơn 9"

Gọi B là biến cố "Lần gieo đầu xuất hiện mặt 4"

$A = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$; $N(A) = 6$; $P(A) = \frac{1}{6}$

a) $A \cap B = \{(4, 6)\}$; $N(A \cap B) = 1$; $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{36} : \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Gọi C là biến cố "Tổng số chấm hai lần gieo là 10"

Gọi D là biến cố "Số chấm hai lần gieo khác nhau"

$$C = \{(5, 5), (4, 6), (6, 4)\} ;\ N(C) = 3$$

$$D = \{(i, j) \mid 1 \le i, j \le 6 ;\ i \ne j\} ;\ N(D) = 30 ;\ P(D) = \frac{5}{6}.$$

c) $(C \cap D) = \{(4, 6), (6, 4)\}$; $N(C \cap D) = 2$; $P(C \cap D) = \frac{1}{18}$.

d) $P\left(C/D\right) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{1}{18} : \frac{5}{6} = \frac{1}{15}$.

95. Gọi A_1 là biến cố "quả lấy lần đầu là đỏ"

Gọi A_2 là biến cố "quả lấy lần thứ hai là đỏ"

a) Theo bài ra, cần tính :

$$P\left(A_2/A_1\right)$$

Nếu A_1 xảy ra thì sau đó trong hộp có 5 + 2 = 7 quả cầu đỏ và 3 + 1 = 4 quả cầu đen.

Suy ra $$P\left(A_2/A_1\right)=\frac{7}{11}.$$

b) Cần tính $P\left(A_2/A_1\right)$. Nếu A_1 xảy ra thì sau đó trong hộp có (3 + 2) quả cầu đen và (5 + 1) quả cầu đỏ.

Suy ra $P\left(A_2/A_1\right)=\dfrac{6}{11}$.

96. Kí hiệu A_1 : "người thứ nhất bắn trúng"

A_2 : "người thứ hai bắn trúng"

Từ đó :

$$A=\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)\cup\left(\overline{A_1}\cap A_2\right)$$

Vì tính độc lập của $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$ và , ta có

$$P(A)=P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)+P\left(\overline{A_1}\cap A_2\right)$$

và tính độc lập của $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, A_2, ta lại có

$$P(A)=P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}).P(A_2)$$

$$=\frac{3}{4}.\frac{6}{7}+\frac{3}{4}.\frac{1}{7}=\frac{3}{4}$$

- $B=A_1\cap A_2$

$$P(B)=P(A_1).\ P(A_2)=\frac{1}{4}.\frac{1}{7}=\frac{1}{28}$$

- $C=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$

$$P(C)=P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2})=\frac{3}{4}.\frac{6}{7}=\frac{9}{14}$$

- $D=\overline{C}$; $P(D)=P(\overline{C})=1-P(C)=\dfrac{5}{14}$

- $E=\left(A_1\cap\overline{A_2}\right)\cup\left(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\right)$

$$P(E)=P(A_1).P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}).P(A_2)=\frac{1}{4}.\frac{6}{7}+\frac{3}{4}.\frac{1}{7}=\frac{9}{28}.$$

97. Gọi A_1 là biến cố : "lấy được K ở lần thứ nhất" ; $P(A_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

A_2 là biến cố : "lấy được K ở lần thứ hai"

A_3 là biến cố : "lấy được K ở lần thứ ba"

a) Biến cố B : "quá trình lấy được dừng ở lần thứ ba"

$$B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$$

$$P(B) = P(\overline{A}_1).P\left(\overline{A}_2 / \overline{A}_1\right).P\left(A_3 / \overline{A}_2 \cap \overline{A}_1\right)$$

$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{4}{50} = \frac{376}{5525} \approx 0{,}068\,.$$

b) Biến cố C : "quá trình lấy dừng lại sau không quá 3 lần".

$$C = A_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$$

$$P(C) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 + A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51} + \frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{4}{50} \approx 0{,}217\,.$$

c) A_1, A_2, A_3 ở đây độc lập

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2).P(A_3) = \left(\frac{48}{52}\right)^2\cdot\frac{4}{52} \approx 0{,}065$$

$$P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = \frac{4}{52} + \frac{48}{52}\cdot\frac{4}{52} + \left(\frac{48}{52}\right)^2\cdot\frac{4}{52} \approx 0{,}213$$

98. Gọi A là biến cố "rút được bi đen từ hộp thứ nhất"

B là biến cố "rút được bi đen từ hộp thứ hai"

Ta thấy A, B độc lập

a) Gọi C là biến cố "rút được 2 bi đen"

$$C = A \cap B\,;\; P(C) = P(A).P(B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{8}{18} = \frac{5}{18}\,.$$

b) Gọi D là biến cố "rút được 2 bi cùng màu".

$$D = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

Vì A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập và $(A \cap B)$, $(\overline{A} \cap \overline{B})$ xung khắc nên

$$P(D) = P(A).P(B) + P(\overline{A}).P(\overline{B}) = \frac{5}{18} + \frac{3}{8}\cdot\frac{10}{18} = \frac{35}{72}\,.$$

c) Biến cố "rút được 2 bi khác màu" là $\overline{D}$.

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = \frac{37}{72}$$

X có ba giá trị 0, 1, 2.

99. a) Gọi A_1 là biến cố "quả lấy được từ hộp thứ nhất là đen"

A_2 là biến cố "quả lấy được từ hộp thứ hai là đen"

Ta thấy A_1, A_2 độc lập.

$$P(X = 0) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2) = \frac{3}{8}.\frac{2}{5} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 1) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1).P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1).P(A_2) = \frac{5}{8}.\frac{2}{5} + \frac{3}{8}.\frac{3}{5} = \frac{19}{40}$$

$$(X = 2) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = \frac{5}{8}.\frac{3}{5} = \frac{3}{8}$$

Bảng phân phối của X :

X	0	1	2
p(X)	$\frac{3}{20}$	$\frac{19}{40}$	$\frac{3}{8}$

b) $E(X) = 0.\frac{3}{20} + 1.\frac{19}{40} + 2.\frac{3}{8} = \frac{49}{40}$

$$V(x) = \left(0 - \frac{49}{40}\right)^2.\frac{3}{20} + \left(1 - \frac{49}{40}\right)^2.\frac{19}{40} + \left(2 - \frac{49}{40}\right)^2.\frac{3}{8} \approx 0,474.$$

100. a) Kí hiệu X là số viên trúng bia. X nhận các giá trị 0, 1, 2

Gọi A_1là biến cố "người thứ nhất bắn trúng bia".

A_2 là biến cố "người thứ hai bắn trúng bia".

Ta có : A_1, A_2 là các biến cố độc lập

Ta có :

$$P(X = 0) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2) = 0,4\ .\ 0,3 = 0,12$$

$$P(X = 2) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = 0,6\ .\ 0,7 = 0,42$$

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 0,46$$

$E(X) = 1,3$

$V(X) = 0,45$

$\sigma(X) \approx 0,67.$

b) Gọi X' là số viên trúng bia. Làm tương tự như trên có

$E(X') = 0,8$

$V(X') = 0,46$

$\sigma(X) \approx 0,68.$

So sánh thấy : $E(X) > E(X')$: bình quân mỗi lần bắn của cặp xạ thủ thứ nhất có khả năng trúng nhiều hơn. Phương sai và độ lệch chuẩn xấp xỉ nhau.

101. a) Bảng phân phối xác suất của X

x	155	157	160	164	168	170
p(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

b) $E(X) \approx 160,6$

$V(X) \approx 27,5.$

102. a) Trước hết xếp chỗ cho sư tử và giữa chúng có một khoảng cách để xếp chỗ cho một con hổ. Có 5! = 120 cách. Còn 6 chỗ (4 chỗ trống giữa hai con sư tử và 2 chỗ ở trước và sau hàng sư tử) để xếp 4 con hổ. Có $A_6^4 = 360$ cách.

Theo quy tắc nhân có tất cả 120 . 360 = 43200 cách dẫn thú dữ ra sân khấu.

b) Giả sử có n con sư tử và k con hổ. Lý luận như trên có

$$P_n . A_{n+1}^k = \frac{n!\,(n+1)!}{(n-k+1)!} \text{ cách}$$

Bài toán chỉ giải được nếu $k \le n + 1$.

103. a) Từ giả thiết bài toán, ta thấy cầu thang phải có 5 bậc. Mặt khác, vì 4,5 : 0,5 = 9 nên có 10 chỗ có thể xây bậc.

Vì vậy có tất cả $C_{10}^5 = 252$ cách xây.

b) Nếu có k bậc thang mà chiều dài AC trải ra được n bậc thì số cách xây bậc là C_{n+1}^k.

104. Trong nhiều bài toán người ta phải sử dụng phép chứng minh bằng quy nạp, nội dung gồm hai bước sau :

Bước 1 : Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 0$.

Bước 2 : Giả sử mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \ge 0$, chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Khi đó ta kết luận mệnh đề đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$.

Chú ý : Trường hợp thường gặp nhất ở bước 1 với n = 1.

Ví dụ 1.

Chứng minh rằng $a^5 - a$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên dương a (1).

Giải.

* Với a = 1 thì $a^5 - 1 = 0$ chia hết cho 5, vậy (1) đúng với a = 1.

* Giả sử (1) đúng với $a = k \geq 1$ ($k \in N$) tức là $k^5 - k \vdots 5$

Xét $(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 5k - k$

$$= k^5 - k + (5k^4 + 10k^3 + 5k)$$

$$k^5 - k \vdots 5 ; (5k^4 + 10k^3 + 5k) \vdots 5 \Rightarrow (k+1)^5 - (k+1) \vdots 5.$$

Vậy (1) đúng với a = k + 1.

Kết luận (1) đúng với mọi số nguyên dương a.

Ví dụ 2.

Chứng minh rằng $n^2 > n + 5$ với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

Giải. Mệnh đề đúng với n = 3 vì $3^2 > 3 + 5$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 3$, tức là $k^2 > k + 5$

Xét $(k+1)^2 - (k+6) = k^2 + 2k + 1 - k - 6$

$$= k^2 - (k+5) + 2k$$

Vì $k^2 > k + 5$ (theo giả thiết quy nạp), $2k > 0$ nên

$$k^2 - (k+5) + 2k > 0 \text{ hay } (k+1)^2 > (k+1) + 5.$$

Mệnh đề đúng với n = k + 1.

Vậy mệnh đề trên đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

105. Mệnh đề đúng với n = 1 vì $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Giả sử mệnh đề đúng với n = k tức là :

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với n = k + 1 tức là

$$1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Thật vậy :

$$1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Như vậy mệnh đề đúng với n = k + 1. Do đó mệnh đề đã cho đúng với mọi $n \in N$.

106. đến **108.** HS tự làm.

109. Do sự phụ thuộc vào n, kí hiệu tổng tất cả các ước số lẻ lớn nhất của các số tự nhiên từ 1 đến 2^n là S(n).

Các số tự nhiên từ 1 đến 2^n ($n \in \mathbb{N}$) bao gồm các số lẻ từ 1 đến 2^n và gấp đôi của các số tự nhiên từ 1 đến 2^{n-1}. Vì mỗi số lẻ là ước lẻ lớn nhất của chính nó và khi chia đôi một số chẵn ta không làm thay đổi các ước lẻ của nó, nên ta có :

$S(n) = S(n - 1) + 1 + 3 + 5 + ... + (2^n \quad 1)$

Tổng của m số lẻ đầu tiên là do đó ta được công thức truy hồi $S(n) = S(n - 1) + 4^{n-1}$ (*)

Chứng minh kết luận của bài toán bằng phép quy nạp :

Với $n = 0 : 3S(0) = 3.1 = 4^0 + 2$ thoả mãn công thức $3S(n) = 4^n + 2$

Bây giờ giả sử đẳng thức trên đúng với $k \le n - 1$ tức là $3S(n - 1) = 4^{n-1} + 2$. Ta phải chứng minh

$$3S(n) = 4^n + 2.$$

Thật vậy $3S(n) = 3S(n - 1) + 3.4^{n-1} = 4^{n-1} + 2 + 3.4^{n-1}$

$= 4^n + 2$ (điều phải chứng minh)

110. Một hàm số u xác định trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số tự nhiên khác không được gọi là một *dãy số vô hạn* (gọi tắt là *dãy số*), kí hiệu $\{u_n\}$ hay $u_1, u_2, u_3,... u_n$.

Ví dụ 1

a) Cho dãy số $\{u_n\} = n$ thì các số hạng của dãy số đó là : 1 ; 2 ; 3 ; 4... ; n ; ...

b) Cho dãy số $\{u_n\} = p$ (các số nguyên tố) thì các số hạng của dãy số đó là : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17; 19 ; ...

c) Cho dãy số $\{u_n\} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ thì các số hạng của dãy số đó là 1 ; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{4}$; ...

111. * Dãy số tăng nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n < u_n + 1$.

* Dãy số giảm nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n > u_n + 1$.

Ví dụ 2

Dãy số $\{u_n\} = n$ là dãy số tăng, dãy số $\{u_n\} = \dfrac{1}{n}$ là dãy số giảm.

112. Dãy số $\{u_n\}$ gọi là :

* Dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n \le M$.

* Dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số M sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n \ge M$

* Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là dãy bị chặn.

Ví dụ 3

Dãy số $\{u_n\} = \cos\frac{nx}{2}$ vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới vì theo tính chất của hàm số cosx thì $-1 \le \cos\frac{nx}{2} \le 1$.

Vậy dãy số $\{u_n\}$ bị chặn.

113. Một dãy số, trong đó mỗi số hạng đứng sau bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số d không đổi gọi là một cấp số cộng.

Số d gọi là công sai của cấp số cộng. Cấp số cộng kí hiệu là ÷.

Tổng quát : $\div u_1, u_2, \dots, u_n$, mà

$$u_2 = u_1 + d,\ u_3 = u_2 + d \dots,\ u_n = u_{n-1} + d.$$

114. CSC có tính chất sau :

a) *Tính chất trung bình cộng* : Mỗi số hạng của CSC là trung bình cộng của số hạng đứng ngay trước và ngay sau nó.

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2},\ u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2}, \dots$$

b) *Tính chất cách đều :* Trong mỗi cấp số cộng hữu hạn, tổng các số hạng cách đều các số hạng đầu và cuối bằng tổng các số hạng đầu và cuối :

$$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \dots$$

115. Số hạng tổng quát của CSC : $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$

116. Tổng n số hạng đầu của CSC :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}(u_1 + u_n)n = \frac{1}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right]n.}$$

117.

$$\begin{array}{rll}
 & 1.2 & = 1^2 + 1 \\
 & 2.3 & = 2^2 + 2 \\
+ & 3.4 & = 3^2 + 3 \\
 & \dots & \\
 & n(n+1) & = n^2 + n \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
1.2 + 2.3 + n(n+1) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

Đáp án E. đúng.

118. $U_1 = U_2 = 1, U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ $(n = 3, 4,...)$

Vậy muốn tìm U_{10} ta phải tìm U_8, U_9.

Ta có $U_3 = 2, U_4 = 3, U_5 = 5, U_6 = 8, U_7 = 13$.

$U_8 = 21, U_9 = 34$. Vậy $U_{10} = 55$. Đáp án C đúng.

119. Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng là :

$U_n = U_1 + (n - 1)d$, thay $U_n = 29$, $U_1 = 2$ ta có

$29 = 2 + (n - 1)d \Rightarrow (n - 1)d = 27(*)$

Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là :

$$S_n = \frac{1}{2}\left[2U_1 + (n-1)d\right]n.$$

Thay số ta có : $155 = \frac{1}{2}[4 + 27]n \Rightarrow n = 10$

Từ (*) ta có d = 3. Đáp án A đúng.

120. Gọi U_1, $U_1 + d$, $U_1 + 2d$ theo thứ tự là đáy nhỏ, đường cao, đáy lớn của hình thang.

Vậy $m = \dfrac{U_1 + U_1 + 2d}{2}.(U_1 + d) = (U_1 + d)^2$

Ta chưa khẳng định được m thuộc tập hợp số nào do không có thông tin về U_1 và d. Vậy E đúng.

121. $U_3 + U_5 = 14 \Rightarrow U_1 + 3d = 7$

$S_{12} = (2U_1 + 11d).6 = 129 \Rightarrow 4U_1 + 22d = 43$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} U_1 + 3d = 7 \\ 4U_1 + 22d = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 2,5 \\ d = 1,5 \end{cases}$$

$U_n = U_1 + (n - 1)d = 23,5 \Rightarrow 2,5 + (n - 1).\ 1,5 = 23,5 \Rightarrow n = 15$.

Đáp án A đúng.

122. $\begin{cases} U_6 = 11 \\ U_8 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 + 5d = 11 \\ U_1 + 7d = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$

Vậy đáp án A đúng.

123. Gọi U_1, U'_1 lần lượt là số hạng đầu, d_1, d'_1 là công sai của hai cấp số cộng có tổng lần lượt là S_n và T_n.

Ta có

$$S_n = \frac{[2U_1 + (n-1)d_1]n}{2}$$

$$T_n = \frac{[2U'_1 + (n-1)d'_1]n}{2}$$

Theo giả thiết ta có : $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27} = \frac{2U_1+(n-1)d_1}{2U'_1+(n-1)d'_1}$, $\forall n$

Vậy $U_{11} = U_1 + 10d_1$, $U'_{11} = U'_1 + 10d'_1$. Nên ta có :

$$\frac{U_{11}}{U'_{11}} = \frac{U_1+10d_1}{U'_1 10d'_1} = \frac{2U_1+20d_1}{2U'_1+20d'_1}.$$

Từ (*) ta có : $\frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{2U_1+20d_1}{2U'_1+20d'_1} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3}$.

$\Rightarrow \frac{U_{11}}{U'_{11}} = \frac{4}{3}$. Vậy đáp án C đúng.

124. Ta có $a_1 = S_1 = 5$, $a_1 + a_2 = S_2 = 16 \Rightarrow a_2 = 11$

mà $a_2 = a_1 + d \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$

Vậy $a_r = a_1 + (r-1)d = 5 + (r-1)6 = 6r - 1$.

Nên đáp án B đúng.

125. U_2, U_6 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - 16X + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = 4 \\ X_2 = 12 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow U_2 = 4$, $U_6 = 12$ (do $d > 0$)

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} U_2 = 4 \\ U_6 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 + d = 4 \\ U1 + 5d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases}$$

126. a) Có

$$\begin{array}{rll} & 1.2 & = 1(1+1) = 1^2 + 1 \\ & 2.3 & = 2(2+1) = 2^2 + 2 \\ + & 3.4 & = 3(3+1) = 3^2 + 3 \\ & \ldots & \\ & & n(n+1) = n(n+1) = n^2 + n \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) =$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \underbrace{(1+2+3+\ldots+n)}_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ (xem bài 1, dãy số)

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

b) Có $n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$.

Do đó : $1.2.3 = 1^3 + 3.1^2 + 2.1$

$2.3.4 = 2^3 + 3.2^2 + 2.2$

$3.4.5 = 3^3 + 3.3^2 + 2.3$

...

$$\frac{\quad n(n+1)(n+2) = n^3 + 3.n^2 + 2.n\quad}{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) = S(n^3) + 3S(n^2) + 2S(n)}$$

Gọi $S(n^3) = 1^3 + 2^3 + \ldots,\ S(n^2) = 1^2 + 2^2 + \ldots,$

$S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots$

Suy ra :

$$S(n^3) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3S(n^2) - 2S(n)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) - 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)^2}{2}\right] = [S(n)]^2.$$

127. a) $\begin{cases} U_1 + 2U_5 = 27 \\ U_7 - U_2 + U_3 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 + 2(U_1 + 4d) = 27 \\ U_1 + 6d - (U_1 + d) + U_1 + 2d = 22 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3U_1 + 8d = 27 \\ U_1 + 7d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3U_1 + 8d = 27 \\ 3U_1 + 21d = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} U_2 - U_1 = 2 \\ \dfrac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{U_5 + U_6 + U_7 + U_8} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 + d - U_1 = 2 & (1) \\ \dfrac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{U_5 + U_6 + U_7 + U_8} = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow d = 2$

Thay vào (2) ta có $\dfrac{4U_1 + 12}{4U_1 + 44} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 8U_1 + 24 = 4U_1 + 44$

$\Leftrightarrow 4U_1 = 20 \Leftrightarrow U_1 = 5$

Vậy ta có CSC = $U_1 = 5$, $d = 2$.

128. a) Dùng công thức $S_n = \frac{1}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right]n$ để viết S_5, S_{10}.

ĐS : $\div\ 1 ; -2 ; -5 ; \ldots$

b) ĐS : $\div\ -0{,}7 ; -0{,}4 ; -0{,}1 ; \ldots$

129. a) Viết theo u_1 và d, rồi giải hệ PT, ĐS : $\div\ 3 ; 6 ; 9 ; \ldots$

và $\div\ -33 ; -18 ; -3 ; \ldots$

b) ĐS : $\div -4 ; -1 ; 2 ; \ldots$ và $\div\ 4 ; 1 ; -2 ; \ldots$

130. a) ĐS : $u_1 = -7 ; d = 3$ và $u_1 = 13\frac{2}{5}$ và $d = -3\frac{4}{5}$.

b) ĐS : $\div$ d, 2d, 3d, ... $(d \neq 0)$.

131. a) Theo tính chất CSC : $u_1 + u_3 = 2u_2$ mà : $u_1 + u_2 + u_3 = 9$

$\Leftrightarrow u_2 = 3$.

Thay vào đầu bài, ta có hệ tương đương : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 6 \\ u_1u_3 = -7 \end{cases}$

Vậy u_1 và u_3 là nghiệm của PT : $x^2 - 6x - 7 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = -1 & \Rightarrow u_1 = -1 \text{ thì } u_3 = 7 \Rightarrow \div -1 ; 3 ; 7 \\ x_2 = 7 & \Rightarrow u_1 = 7 \text{ thì } u_3 = -1 \Rightarrow \div\ 7 ; 3 ; -1. \end{array}\right.$$

b) $(u_1 + u_2 + u_3)^2 = 27^2$

$$\Rightarrow \underbrace{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}_{275} + 2(u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1) = 27^2$$

$\Leftrightarrow u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 227 \qquad (1)$

Theo tính chất CSC : $u_1 + u_3 = 2u_2$ mà $u_1 + u_2 + u_3 = 27$

$\Leftrightarrow u_2 = 9$.

Thay vào (1) : $9(u_1 + u_3) + u_1u_3 = 227 \Leftrightarrow u_1u_3 = 65$.

Ta có hệ : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 18 \\ u_1u_3 = 65 \end{cases}$. Giải tiếp như câu a.

ĐS : $\div\ 5 ; 9 ; 13$; và $13 ; 9 ; 5$.

132. Số phải tìm có chữ số hàng đơn vị nhỏ nhất, gọi là x $(x \in \mathbb{N}^*)$.

Theo giả thiết : $\div\ x + 2d, x + d, x$

$$\frac{100(x + 2d) + 10(x + d) + x}{(x + 2d) + (x - d) + x} = 48 \qquad (1)$$

$100(x + 2d) + 10(x + d) + x - 198 = 100x + 10(x + d) + x + 2d$ (2)

(2) cho $d = 1$, thay vào (1) được $x = 2$. Số phải tìm là 432.

133. Gọi a là chữ số hàng trăm ($1 \le a \le 9$), công sai d thì các chữ số đó là : $\div$ a, $a + d$, $a + 2d$.

Một số chia hết cho 45 thì nó phải chia hết cho 5 và cho 9.

– Một số chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của nó phải chia hết cho 9, nên :

$$a + (a + d) + a(+ 2d) = 3(a + d)$$

hoặc bằng 9 (1)
hoặc bằng 18 (2)
hoặc bằng 27 (3)

– Một số chia hết cho 5 thì chữ số tận cùng phải là 0 hoặc 5, nên :

hoặc $a + 2d = 0$ (*)
hoặc $a + 2d = 5$ (**)

Xét cụ thể : (1) cho $a + d = 3$.

– Kết hợp (*) cho $d = -3$, $a = 6$. Số phải tìm là 630.

– Kết hợp (**) cho $d = 2$, $a = 1$. Số phải tìm là 135.

(2) cho $a + d = 6$.

– Kết hợp (*) cho $d = -6$, $a = 12$ (loại).

– Kết hợp (**) cho $d = -1$, $a = 7$. Số phải tìm là 765.

(3) cho $a + d = 9$. Bạn đọc tự làm như trên, và không tìm được số thoả mãn.

134. Đường thẳng $y = a$ song song trục hoành, cắt đồ thị $y = \cos x$ tại các điểm mà hoành độ của chúng cách đều nhau.

ĐS : $a = \pm 1$; 0.

135. Gọi các nghiệm là $x_1 < x_1 < x_3$. Ta có : $\div$ x_1, x_2, x_3. Theo định lí Viet cho PT bậc ba :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1 & (2) \\ x_1x_2x_3 = -c & (3) \end{cases}$$

Theo tính chất CSC : $x_1 + x_3 = 2x_2$ nên (1) cho $x_2 = -\frac{1}{3}.3 = -1$.

Thay x_2 vào hệ trên, được : $\begin{cases} x_1 + x_3 = -\frac{2}{3}.3 = -2 \\ x_1x_3 = -1 \\ x_1x_3 = \frac{3c}{3} = c \end{cases} \Rightarrow c = -1.$

136. a) VT là tổng n số hạng đầu của CSC mà $u_1 = 2$, $d = 3$. Theo công thức :

$$S_n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2}n \Leftrightarrow 155 = \frac{4 + 3(n-1)}{2}n$$

$\Leftrightarrow 3n^2 + n - 310 = 0 \Rightarrow n = 10.$

Có $x = u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow x = 2 + 9 . 3 = 29.$

b) Viết lại PT đã cho : $nx - \underbrace{(1+3+...+27)}_{\text{n số hạng}} = 70$

Trong dấu ngoặc là CSC có $u_1 = 1$, $d = 2$, $u_n = 27$, mà

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow n = 14.$$

Vậy $14x = 70 + \frac{1+27}{2}.14 \Rightarrow x = 19.$

137. Gọi S_1 là tổng tất cả các số có hai chữ số :

$$S_1 = \frac{10+99}{2}.90 = 4905.$$

Gọi S_2 là tổng tất cả các số có hai chữ số chia hết cho 3 :

$$S_2 = \frac{12+99}{2}.30 = 1665.$$

Gọi S_3 là tổng tất cả các số có hai chữ số chia hết cho 5 :

$$S_3 = \frac{10+95}{2}.18 = 945.$$

Gọi S_4 là tổng tất cả các số có hai chữ số chia hết cho 15 :

$$S_4 = \frac{15+90}{2}.6 = 315.$$

Theo đầu bài, ta phải tìm : $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 = 2610.$

138. Ta có :

$$(1) \begin{cases} \dfrac{2u_1 + 3d}{2}.4 = 68 \\ \dfrac{2u_1 - 3d}{2}.4 = -36 \end{cases} \Rightarrow u_1 + u_n = 8$$

Ta cũng có : $\frac{u_1 + u_n}{2} n = 68 \Rightarrow n = 17$ và $u_n = u_{17} = u_1 + 16d$

Hệ (1) cho $\begin{cases} 2u_1 + 3d = 34 \\ 2u_1 + 29d = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -2 \\ u_1 = 20. \end{cases}$

ĐS : ÷ 20 ; 18 ; 16 ; ...

139. Theo đầu bài $S_n = \frac{1}{2}(S_{2n} - S_n) \Leftrightarrow 3S_n = S_{2n} \Leftrightarrow$

$$\frac{3}{2}[2u_1 + (n-1)d]n = \frac{1}{2}[2u_1 + (2n-1)d]2n$$

$\Leftrightarrow 2u_1 = (n+1)d.$

Ta phải tìm :

$$\frac{S_{3n}}{S_n}=\frac{[2u_1+(3n-1)d]\frac{3}{2}n}{[2u_1+(n-1)d]\frac{n}{2}}=\frac{(n+1)d+(3n-1)d}{(n+1)d+(n-1)d}=6.$$

140. a) $u_n=u_1+(n-1)d$. Từ hai giả thiết đã cho tìm được u_1 và d, thay vào u_n.

ĐS : n = 15.

b) $\begin{cases}103+u_2=88+u_n\\103+u_2=u_2+u_{n-1}+87,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_n=u_2+15\\u_{n-1}=15,5\end{cases}$

$\Rightarrow d=u_n-u_{n-1}=u_2-0,5\Leftrightarrow$

$u_2=0,5+d\Rightarrow u_1=0,5.$

Từ $S_n-u_n=S_{n-2}\Leftrightarrow 88=\frac{u_1+u_{n-1}}{2}(n-1)\quad\Rightarrow n-1=11\Rightarrow n=12$

c) $\begin{cases}\dfrac{S_{13}}{S_n-S_{n-13}}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{S_n-S_3}{S_{n-3}}=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+19d=nd\\-2u_1+22d=nd\end{cases}$

ĐS : n = 20.

141. $\begin{cases}u_1+d-(u_1+5d)+u_1+3d=-7\\u_1+7d-(u_1+6d)=2(u_1+d)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-d=-7 & (1)\\-2u_1-d=0 & (2)\end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow d=-2u_1$ thay vào (1) ta có: $u_1+2u_1=-7$

$\Rightarrow u_1=-\frac{7}{3}\Rightarrow d=\frac{14}{3}.$

142. $S_3=9,\quad S_4=16\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(2u_1+2d)}{2}.3=9\\\dfrac{2u_1+3d}{2}.4=16\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+d=3\\2u_1+3d=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=2\end{cases}\quad(*)$

Ta có : $S_n=\frac{[2u_1+(n-1)d].n}{2}=100$

Thay (*) vào ta có :

$$\frac{[2+(n-1).2]n}{2} = 100 \Leftrightarrow n^2 = 100 \Leftrightarrow n = 10 \text{ (n = -10 bị loại)}$$

Vậy 10 số hạng của cấp số cộng là :

$$\div\ 1, 3, 5, \ldots, 19.$$

143. • Giả sử d > 0. Ta có :

$$d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \ldots = u_n - u_{n-1} > 0$$

Do đó :

$$\frac{1}{u_1u_2} = \frac{u_2 - u_1}{u_1u_2}.\frac{1}{d} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)$$

$$\frac{1}{u_2u_3} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3}\right)$$

$$\frac{1}{u_3u_4} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_4}\right)$$

...

$$\frac{1}{u_{n-1}u_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}\right)$$

$$S = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{d}.\frac{u_n - u_1}{u_1u_n} =$$

$$= \frac{1}{d}.\frac{u_1 + (n-1)d - u_1}{u_1u_n} = \text{đpcm.}$$

• d < 0 chứng minh tương tự.

144. a) Điều kiện để phương trình trùng phương có bốn nghiệm là phương trình bậc hai trung gian có hai nghiệm dương :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \\ m > -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{2} < m \neq 0$$

Để ý rằng phương trình trùng phương có hai nghiệm đối nhau. Để chúng lập thành cấp số cộng, ta gọi một nghiệm là x_o thì các nghiệm đi theo là $-x_o$ và $\pm 3x_o$. Như vậy, phương trình bậc hai trung gian có các nghiệm x_o^2 và $9x_o^2$. Theo định lí Viet, ta có :

$$\begin{cases} x_0^2 + 9x_0^2 = 2(m+1) \\ x_0^2 . 9x_0^2 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \dfrac{m+1}{5} \\ (x_0^2)^2 = \dfrac{2m+1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m+1}{5}\right)^2 = \frac{2m+1}{9} \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0$$

$\Rightarrow m = 4$ và $m = -\dfrac{4}{9}$ (thoả mãn điều kiện).

b) Vì ÷ a, b, c nên $2b = a + c$. Vậy $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{3}{2}b$

Có $\left.\begin{array}{l} S = pr \\ S = \dfrac{abc}{4R} \end{array}\right\} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S}$ và $r = \dfrac{S}{p} \Rightarrow$ đpcm.

c) Có $a + c = 2b \Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2\sin B$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2}\right) = 2\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow 3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = 1.$$

Từ công thức :

$r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$ (p là nửa chu vi ΔABC), ta có :

$$\frac{3}{2}r\left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right) = \frac{3r}{2}\left(\frac{r}{p-c} - \frac{r}{p-a}\right) = \frac{3}{2}r^2\,\frac{(c-a)}{(p-a)(p-c)}$$

$$= \frac{3r^2d}{(p-a)(p-c)} = 3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}d = \text{đpcm}.$$

145. a) Theo tính chất CSC : $\tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = 2\tan\dfrac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2} + \cos\frac{A-C}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow 1 + \cos B = 2\sin^2\frac{B}{2} + 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

$\Leftrightarrow 1 + \cos B = 1 - \cos B + \cos A + \cos C$

$\Leftrightarrow 2\cos B = \cos A + \cos C \Rightarrow$ đpcm.

b) HS tự giải.

146. • Ta có $\div$ a, b, c $\Leftrightarrow a + c = 2b \Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2\sin B$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2} \quad (\frac{A+C}{2} \neq 0, \frac{A+C}{2} \neq \pi)$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow 3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

• Điều ngược lại HS tự chứng minh.

147. • Ta có :

$$\sin A\sin B = \frac{3\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \sin A\sin B = \frac{3\sin^2 C}{2(1+\cos C)}$$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R} = 3.\frac{c^2}{4R^2.2\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} \Leftrightarrow a + b = 2c \Rightarrow$ đpcm.

b) Vì $B + C - A = B + C + A - 2A = 180^o - 2A$

$\Rightarrow \sin(B + C - A) = \sin 2A$.

Tương tự :

$\sin(C + A - B) = \sin 2B, \sin(A + B - C) = \sin 2C$.

Bài toán là : Cho CSC $\div$ sin2A, sin2B, sin2C.

Theo tính chất CSC :

$2\sin 2B = \sin 2A + \sin 2C$

$\Leftrightarrow 2\sin B\cos B = \sin(A + C)\cos(A - C)$

$\Leftrightarrow 2\cos B = \cos(A - C) \Leftrightarrow \cos B = \cos(A - C) - \cos B$

$\Leftrightarrow \cos B = \cos(A - C) + \cos(A + C)$

$$\Leftrightarrow \cos B = 2\cos A\cos C \Leftrightarrow \frac{2}{\cos B} = \frac{1}{\cos A\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin B}{\cos B} = \frac{\sin(A+C)}{\cos A\cos C} \Leftrightarrow 2\tan B = \frac{\sin A\cos C + \sin C\cos A}{\cos A\cos C} \Leftrightarrow \text{đpcm.}$$

148. • cotA, cotB, cotC lập thành CSC :

$$\Leftrightarrow \cot A + \cot C = 2\cot B \Leftrightarrow \frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = 2\cos B\sin A\sin C \Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} = 2.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.\frac{a}{2R}.\frac{c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - b^2 \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

$\Leftrightarrow a^2, b^2, c^2$ lập thành CSC.

149. Gọi các nghiệm là $x_1 < x_2 < x_3$. Ta có $\div\ x_1, x_2, x_3$. Theo định lí Viet cho phương trình bậc ba :

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a & (1)\\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b & (2)\\ x_1x_2x_3 = -c & (3)\end{cases}$$

Theo tính chất của cấp số cộng $x_1 + x_3 = 2x_2$ nên từ (1) cho $x_2 = -\frac{1}{3}a$.

Thay vào hệ (I) ta được hệ :

$$(\mathrm{II})\begin{cases} x_1 + x_3 = -\dfrac{2}{3}a & (1)'\\ x_1x_3 = b - \dfrac{2a^2}{9} & (2)'\\ x_1x_3 = \dfrac{3c}{a} & (3)'\end{cases}$$

Từ (1)', (2)' suy ra x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai

$t^2 + \frac{2}{3}at + b - \frac{2a^2}{9} = 0.$ Phương trình này phải có hai nghiệm phân biệt nên

$\Delta' > 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(a^2 - 3b) > 0.$

Mặt khác $x_2 = -\frac{1}{3}a$, nên $\left(-\frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(-\frac{1}{3}a\right) + c = 0$

$\Leftrightarrow 2a^3 - 9ab + 27c = 0$ (*)

Như vậy quan hệ giữa a, b, c là (*) và $\frac{1}{3}(a^2 - 3b) > 0$.

150. Áp dụng bài 149 với a = m, b = –1, c = –m ta có :

$$\begin{cases}2m^3 + 9m - 27m = 0\\ \frac{1}{3}(m^2 + 3) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = 0,\ m = \pm 3\\ \forall m\end{cases}$$

ĐS : m = 0, m = 3, m = –3.

151. $A + B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} - C \Rightarrow \cot(A + B) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \tan C$

suy ra $\frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot A + \cot B} = \frac{1}{\cot C} \Rightarrow \cot A.\ \cot B.\ \cot C = \cot A + \cot B + \cot C$

Do ÷ cotA, cotB, cotC $\Rightarrow$ cotA + cotC = 2cotB

nên cotA. cotB. cotC = 3cotB $\Rightarrow$ cotA . cotC = 3

152. • Nếu x = y thì hệ (1) có một nghiệm $x = y = -\frac{1}{2}\ \forall m$.

• Nếu x ≠ y thì hệ (1) $\begin{cases}x^2 + y^2 + xy - m = 0 & (2)\\ x + y = -1 & (3)\end{cases}$

Từ phương trình (3) ta có y = –x – 1 thế vào (2) ta có phương trình :

$$x^2 + (-x - 1)^2 + x(-x - 1) - m = 0$$

$$x^2 + x - (m - 1) = 0 \qquad (4)$$

Gọi hai nghiệm của (4) là x_1, x_2, ta có $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$ (trùng với nghiệm x_3 của hệ) suy ra hệ có ba nghiệm x_1, x_2, $x_3 = -\frac{1}{2}$ lập thành cấp số cộng trong đó $|x_1|, |x_2| > 1$.

Do đó (4) phải có hai nghiệm đối xứng nhau qua $x = -\frac{1}{2}$, và $|x_1| . |x_2| > 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}f(-1) < 0\\ f(1) > 0\end{cases} \text{ (do } a = 1 > 0)$$

Trong đó $f(x) = x^2 + x - (m - 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-(m - 1) < 0\\ 3 - m < 0\end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

153. Cấp số nhân là một dãy số trong đó mỗi số hạng đứng sau bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số q không đổi.

Số q gọi là công bội của cấp số nhân.

Tổng quát : ÷÷ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$,

mà $u_2 = u_1q$, $u_3 = u_2q$, $u_4 = u_3q$,... $u_n = u_{n-1}q$

Ví dụ : ÷÷ 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{n-1}, ...

154. 1) Cấp số nhân có các tính chất sau :

a) *Tính chất trung bình nhân* : Mỗi số hạng của cấp số nhân kể từ số hạng thứ 2 là trung bình nhân của số hạng đứng ngay trước và ngay sau nó :

$$u_2^2 = u_1u_2,\ \ u_3^2 = u_2u_4,\ \ u_4^2 = u_3u_5, ..., u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1}\ \ (*)$$

b) Tính chất cách đều : Trong một CSN hữu hạn, tích các số hạng cách đều các số hạng đầu và cuối, bằng tích các số hạng đầu và cuối :

$$u_1u_n = u_2u_{n-1} = u_3u_{n-2} = ...$$

Chẳng hạn trong cấp số nhân :

$\div\!\!\div$ 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{n-1},... thì $2^2 = 1 . 4$, $4^2 = 2 . 8$, $8^2 = 4 . 16$...

Trong cấp số nhân

$\div\!\!\div$ 4, 16, 64, 256, 1024, 4096

thì ta có 4 . 4096 = 16. 1024 = 64 . 256 = 16384

2) Công thức

a) Số hạng tổng quát của CSN : $\boxed{u_n = u_1\, q^{n-1}}$

b) Tổng n số hạng đầu của CSN :

$$\boxed{S_n = \frac{u_nq - u_1}{q-1} = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}}$$

Ví dụ : Tìm CSN biết $\begin{cases} u_5 - u_1 = -15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$

Giải. Muốn tìm CSN, ta phải tìm số hạng đầu u_1 và công bội q.

Vì vậy, từ giả thiết cho, ta viết theo u_1 và q :

$$\begin{cases} u_1q^4 - u_1 = 15 \\ u_1q^3 - u_1q = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^4 - 1) = 15_{(1)} \\ u_1q(q^2 - 1) = 6_{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{u_1(q^4 - 1)}{u_1q(q^2 - 1)} = \frac{15}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(q^2 - 1)(q^2 + 1)}{q(q^2 - 1)} = \frac{5}{2}\ (\text{vì } u_1 \neq 0) \Leftrightarrow \frac{q^2 + 1}{q} = \frac{5}{2}\ (\text{vì } q^2 - 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với q = 2, thay vào (1) được $u_1 = 1$ và có CSN : 1, 2, 4,...

Với $q = \frac{1}{2}$, thay vào (1) được $u_1 = -16$ và có CSN : –16, –8, –4,...

155. $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ u_3 - u_1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 21 \\ u_1(q^2-1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1+q+q^2}{q^2-1} = \dfrac{21}{9}$

$\Leftrightarrow 4q^2 - 3q - 10 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} q = -\dfrac{5}{4} \text{ (loại)} \\ q = 2 \Rightarrow u_1 = 3 \end{array}\right.$

Lại có : $189 = \dfrac{3(2^n - 1)}{1} \Leftrightarrow 2^2 = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$

156. a) Đổi theo u_1 và q, ta có hệ tương đương :

$$\begin{cases} u_1(1-q^2+q^4) = -65 \\ u_1(1+q^6) = -325 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-q^2+q^4}{(1+q^2)(1-q^2+q^4)} = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow q = \pm 2, u_1 = -5.$

ĐS : ∺ –5 ; –10 ; –20 ; ... và ∺ –5 ; 10 ; –20 ; ...

b) $(u_1 + u_2 + u_3)^2 = 35^2$

$\Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2(u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1) = 35^2$

$\Leftrightarrow u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 350.$

Theo tính chất CSN : $u_1u_3 = u_2^2$ nên :

$$u_2(u_1 + u_2 + u_3) = 350 \Rightarrow u_2 = 10.$$

Ta có hệ PT : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 25 \\ u_1u_3 = 100 \end{cases}$. Giải ra được u_1, u_3.

ĐS : ∺ 5 ; 10 ; 20 và ∺ 20 ; 10 ; 5.

c) Do $u_1u_3 = u_2^2$ nên $u_2^3 = 27 \Rightarrow u_2 = 3$. Ta có hệ :

$\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1u_3 = 9 \end{cases}$. Giải ra được u_1 ; u_3.

ĐS : ∺ 1 ; 3 ; 9 và ∺ 9 ; 3 ; 1.

157. a) Có $\dfrac{u_4(q^3-1)}{u_4(q-1)} = 3 \Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \text{ (loại)} \\ q = -2 \rightarrow u_1 = -3. \end{array}\right.$

Mà $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow 1023 = \dfrac{-3\left[1-(-2)^n\right]}{3} \Leftrightarrow 1024 = (-2)^n \Leftrightarrow$

$(-2)^{10} = (-2)^n \Rightarrow n = 10.$

b) ĐS : n = 5.

158. Có $\begin{cases} \dfrac{S_{11}}{S_n - S_{n-11}} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{S_n - S_9}{S_{n-9}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1\dfrac{1-q^{11}}{1-q}}{u_1\dfrac{1-q^n}{1-q} - u_1\dfrac{1-q^{n-11}}{1-q}} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{u_1\dfrac{1-q^n}{1-q} - u_1\dfrac{1-q^9}{1-q}}{u_1\dfrac{1-q^{n-9}}{1-q}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1-a^{11}}{q^{n-11} - q^n} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{q^9 - q^n}{1 - q^{n-9}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-q^{11}}{q^n\left(\dfrac{1}{q^{11}} - 1\right)} = \dfrac{1}{8} \\ q^9 - q^n = 2(1 - q^{n-9}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q^{11}}{q^n} = \dfrac{1}{8} \\ q^9(1 - q^{n-9}) = 2(1 - q^{n-9}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8q^{11} = q^n \\ q^9 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (q^9)^3 q^{11} = q^n$$

$\Rightarrow n = 27 + 11 = 38.$

159. Gọi chữ số hàng đơn vị là x thì chữ số hàng chục là xq và chữ số hàng trăm là xq^2. Theo đầu bài :

$$\div\ xq^2, xq\ ;\ x : 100xq^2 + 10xq + x = x(100q^2 + 10q + 1)$$

Vì là số nguyên tố nên chỉ có x = 1.

– Nếu q = 1, có số 111 = 3.37 (loại)

– Nếu q = 2, có số 421 là số nguyên tố

– Nếu q = 3, có số 931 = 7.133 (loại).

Vậy số cần tìm là : 421.

160. Ta có : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 & (1) \\ u_1u_2u_3 = 27 & (2) \end{cases}$

Theo tính chất CSN ta có $u_1u_3 = u_2^2$ nên $\Leftrightarrow u_2^3 = 27$

$\Leftrightarrow u_2 = 3$. Thay vào (1) được $u_1 + u_3 = 10$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1u_3 = 9 \end{cases}$$

Giải hệ này được : hoặc $u_1 = 1, u_3 = 9,\ S_5 = \dfrac{u_1(q^5 - 1)}{q - 1} = 121$

hoặc $u_1 = 9, u_3 = 1,\ S_5 = \dfrac{u_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \dfrac{121}{9}$

161. Theo gt : $B = 2A$, $C = 2B = 4A$.

Do $A + B + C = \pi \rightarrow A = \frac{\pi}{7}$ và $B = \frac{2\pi}{7}$, $C = \frac{4\pi}{7}$.

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2R\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{2R\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2R.2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{2R\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{a} \text{ (đpcm).}$$

162. Tóm tắt đầu bài:

÷ u_1, u_2, u_3 và $u_1 + u_2 + u_3 = 21$

∺ $u_1, u_2 - 1, u_3 + 1$

Theo tính chất CSC : $u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 3u_2$

$\Leftrightarrow 3u_2 = 21 \Leftrightarrow u_2 = 7$.

Theo tính chất CSN : $u_1(u_3 + 1) = (u_2 - 1)^2$

$\Leftrightarrow u_1(u_3 + 1) = 36$ (*)

Do $u_2 = 7 \rightarrow u_1 + u_3 = 2u_2 = 14 \rightarrow u_3 = 14 - u_1$

Thay vào (*), ta có : $u_1(14 - u_1 + 1) = 36$

$$\Leftrightarrow u_1^2 - 15u_1 + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = 12 \end{array}\right.$$

ĐS. Có hai CSC : ÷ 3, 7, 11 và ÷ 12, 7, 2.

163. Tóm tắt đầu bài :

∺ u_1, u_2, u_3 và $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ (1)

÷ $u_1 - 4, u_2, u_3$

Theo tính chất CSC, ta có : $u_1 - 4 + u_3 = 2u_2$

$\Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 - 4 = 3u_2$

$\Leftrightarrow 24 = 3u_2 \Rightarrow u_2 = 8$

Theo tính chất CSN : $u_1u_3 = u_2^2 = 64$. (2)

Từ (1) cho $u_1 + u_3 = 20 \rightarrow u_3 = 20 - u_1$

Thay vào (2) : $u_1(20 - u_1) = 64 \Leftrightarrow u_1^2 - 20u_1 + 64 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 4 \\ u_1 = 16 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_3 = 16 \\ u_3 = 4 \end{array}\right.$$

ĐS : Có hai CSN : ∺ 4, 8, 16 và ∺ 16, 8, 4.

164. Gọi ba số hạng đầu của cấp số cộng theo thứ tự là U_1, U_2, U_3.

Theo tính chất của CSC ta có $U_1 + U_3 = 2U_2$

Theo đề bài ta có $U_1 + U_2 + U_3 = 12 \Rightarrow$

$2U_2 + U_2 = 12 \Rightarrow U_2 = 4$ nên $U_1 + U_3 = 8$ (1)

Cũng theo đề bài ta có CSN : $\div\ U_1, U_2, U_3 + 2$

Theo tính chất của CSN ta có : $U_2^2 = U_1(U_3 + 2)$

$\Rightarrow 16 = U_1(U_3 + 2) \Leftrightarrow 16 = U_1U_3 + 2U_1$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có

$16 = (8 - U_1)U_1 + 2U_1 \Leftrightarrow U_1^2 - 10U_1 + 16 = 0$

Giải phương trình ta được $U_1 = 8$, $U_1 = 2$

- Với $U_1 = 8$, ta có cấp số cộng

  $\div\ 8, 4, 0$

- Với $U_1 = 2$, ta có cấp số cộng

  $\div\ 2, 4, 6.$

165. Tóm tắt đầu bài : $\begin{cases} \text{có } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ \div\ a, b, c \\ ∺\ b, c, d \end{cases}$

Ta hãy quy về một số chẳng hạn b

Theo tính chất của cấp số cộng (CSC) : $a + c = 2b$

$\Rightarrow a + c + b = 2b + b \Rightarrow a + 12 = 3b \Rightarrow a = 3b - 12$

$c = 2b - a \Rightarrow c = 2b - (3b - 12) = 12 - b$

$d + a = 14 \Rightarrow d = 14 - a \Rightarrow d = 14 - (3b - 12) = 26 - 3b$

∺ b, c, d, theo tính chất cơ bản của cấp số nhân ta có :

$$(12 - b)^2 = (26 - 3b)b \Leftrightarrow 4b^2 = 50b + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = 8 \\ b_2 = 4{,}5 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Dễ dàng tìm được bốn số nguyên

- 12, 8, 4, 2

166. Gọi ba số dương theo thứ tự là U_1, U_2, U_3. $(U_1 > 0)$

Theo đề bài ta có $\div\ U_1, U_2, U_3$ và $U_3 = 5U_1$

Vậy ta có CSC : $\div\ U_1, U_2, 5U_1$

Theo tính chất của CSC : $2U_2 = 6U_1 \Rightarrow U_2 = 3U_1$

Cũng theo đề bài ta có ∺ $U_1, U_2, 5U_1 + 8$

Theo tính chất của CSN : $U_2^2 = U_1(5U_1 + 8)$

Vậy ta có $9U_1^2 = 5U_1^2 + 8U_1$

$$4U_1^2 - 8U_1 = 0 \Leftrightarrow 4U_1(U_1 - 2) = 0 \Leftrightarrow U_1 = 2,\ U_1 = 0 \text{ (loại)}$$

Do đó ba số phải tìm là

$2 ; 6 ; 10.$

167. Theo tính chất CSN, ta có :

$$\left(\sin\frac{3x}{2}\right)^2 = \sin x \sin 3x \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin\frac{3x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 4\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{3x}{2} \text{ (với } \sin\frac{x}{2} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 3 - 4\sin^2\frac{x}{2} = 4\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow 3 - 2(1 - \cos x) = 2(\cos 2x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 2(2\cos^2 x - 1 + \cos 2x) \Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 4\cos^2 x - 2 + 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow 3 = 2(1 + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

168. a) Ta có các nghiệm $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$. Theo định lí Viet :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2 \\ x_1x_2x_3 = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(1 + q + q^2) = -1 & (1) \\ x_1^2q(1 + q + q^2) = 2 & (2) \\ x_1^3q^3 = -a & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với x_1q và so sánh với (2) được $x_1q = -2$ và (3) cho $a = 8$

b) Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b & (2) \\ x_1x_2x_3 = -c & (3) \end{cases}$

Gọi q là công bội của $\div\div$ x_1, x_2, x_3 thì $\div\div$ $\frac{x_2}{q}, x_2, x_2q$. Suy ra hệ tương đương :

$$\begin{cases} x_2\left(\frac{1}{q}+1+q\right) = -a \\ x_2^2(\frac{1}{q}+1+q) = b \\ x_2^3 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{q}+1+q = -\frac{a}{x_2} \\ x_2^2\left(-\frac{a}{x_2}\right) = b \\ x_2^3 = -c \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

$b^3 = ca^3$ (đpcm).

169. Để PT có nghiệm, ta phải có đk :

$$\begin{cases} \Delta_1 = 9 - 4m > 0 \\ \Delta_2 = 36 - n > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ n < 36 \end{cases}$$

Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$ và $\begin{cases} x_3 + x_4 = 12 \\ x_3x_4 = n \end{cases}$

Gọi q là công bội của CSN thì $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, $x_4 = x_1q^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_1q = 3 \\ x_1q^2 + x_1q^3 = 12 \end{cases} \Rightarrow q = 2.$$

Thay vào $x_1(1 + q) = 3 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x_4 = 8$.

Mà $m = x_1x_2 = 2$, $n = x_3x_4 = 32$ (thoả mãn đk).

ĐS : $m = 2$; $n = 32$.

170. a) Có : $\frac{1-a^{x+1}}{1-a} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4) \Rightarrow$

$$1-a^{x+1} = (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4) \Leftrightarrow 1 - a^{x+1} = 1 - a^8 \Rightarrow x = 7.$$

b) Có $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^x = \frac{21}{32} - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^x}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{11}{32} \Rightarrow x = 5.$$

171. Có $\left.\begin{array}{l} u_{m+n} = A,\ \text{mà } u_{m+n} = u_1q^{m+n-1} \\ u_{m-n} = B,\ \text{mà } u_{m-n} = u_1q^{m-n-1} \end{array}\right\}$

$$A = Bq^{2n} \Rightarrow q = \sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$$

Lại có : $\left.\begin{array}{l} u_m = u_1q^{m-1} \\ u_{m+n} = u_1q^{m+n-1} \end{array}\right\} \frac{u_m}{A} = q^{-n}$

$$\Rightarrow u_m = A\sqrt[2n]{\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}} = \sqrt{AB}$$

Tương tự : $u_n = A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m}{2n}}$.

172. Có $S_n = u_1 + u_1q + ... + u_1q^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{2n} - S_n = u_1q^n + u_1q^{n+1} + ... + u_1q^{2n-1} = q^nS_n \\ S_{3n} - S_{2n} = u_1q^{2n} + u_1q^{2n+1} + ... + u_1q^{3n-1} = q^{2n}S_n \end{array}\right\}$$

Suy ra đpcm vì cùng bằng $\frac{1}{q^n}$.

173. Tóm tắt đầu bài :

$$\begin{cases} \div\ u_1, u_2, u_3 \text{ có } u_1 + u_2 + u_3 = 30 \text{ và } u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Z}^+ \\ \because\ u_1 - 5, u_2 - 4, u_3. \end{cases}$$

Theo tính chất CSC : $u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow 3u_2 = 30 \Leftrightarrow u_2 = 10$

$\Rightarrow u_1 + u_3 = 20$

Theo tính chất CSN : $(u_1 - 5)u_3 = (u_2 - 4)^2 \Leftrightarrow (u_1 - 5)u_3 = 36$

Ta có hệ PT : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 \\ (u_1 - 5)u_3 = 36 \end{cases}$

Giải ra được u_1 và u_3.

ĐS : ÷ 8 ; 10 ; 13 và ÷ 17, 10, 3.

174. Tóm tắt đầu bài :

$$\begin{cases} \because\ u_1,\ u_2,\ u_3 \text{ có } u_1 + u_2 + u_3 = 65 \text{ và } u_1 < u_2 < u_3 \in \mathbb{Z}^+ \\ \div\ u_1 - 1, u_2, u_3 - 19 \end{cases}$$

Theo tính chất CSC : $(u_1 - 1) + (u_3 - 19) = 2u_2$

$\Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 - 20 = 3u_2 \Rightarrow u_2 = 15 \Rightarrow u_1 + u_3 = 50.$

Theo tính chất CSN : $u_1u_3 = u_2^2 = 15^2$.

Ta có hệ PT : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 50 \\ u_1u_3 = 15^2 \end{cases}$. Giải ra được u_1 và u_3

ĐS : ∺ 5 ; 15 ; 45 và ∺ 45 ; 15 ; 5.

175. Tóm tắt đầu bài : $\begin{cases} \div\ u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{Z}^+ \\ ∺\ u_1 - 2,\ u_2 - 6,\ u_3 - 7,\ u_4 - 2 \end{cases}$

Theo tính chất CSN : $\begin{cases} (u_1 - 2)(u_1 + 2d - 7) = (u_1 + d - 6)^2 \\ (u_1 + d - 6)(u_1 + 3d - 2) = (u_1 + 2d - 7)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d^2 + 22 - 3u_1 - 8d = 0 \\ d^2 + 37 - 6u_1 - 8d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 = d^2 - 8d + 22 \\ 6u_1 = d^2 - 8d + 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{d^2 - 8d + 22}{d^2 - 8d + 37} \\ 3u_1 = d^2 - 8d + 22 \end{cases}$$

Giải ra được $d = 7$ và $u_1 = 5$, có ÷ 5 ; 12 ; 19 ; 26 (đã loại nghiệm không thích hợp).

176. Tóm tắt đầu bài : $\begin{cases} ∺\ u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{Z}^+ \\ \div\ u_1 - 2,\ u_2 - 1,\ u_3 - 7,\ u_4 - 27 \end{cases}$

Theo tính chất CSC : $\begin{cases} (u_1 - 2) + (u_3 - 7) = 2(u_2 - 1) \\ (u_2 - 1) + (u_4 - 27) = 2(u_3 - 7) \end{cases}$

Thay u_2, u_3, u_4 theo công thức $u_n = u_1q^{n-1}$, ta có hệ tương đương :

$$\begin{cases} u_1 - 2 + u_1q^2 - 7 = 2(u_1q - 1) \\ u_1q - 1 + u_1q^3 - 27 = 2(u_1q^2 - 7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(2q - 1 - q^2) = -7 \\ u_1q(2q - 1 - q^2) = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(2q - 1 - q^2) = -7 \\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow q = 2,\ u_1 = 7.$$

177. Tóm tắt đầu bài : $\begin{cases} ∺\ a_1, a_2, a_3 \text{ có } a_1 + a_2 + a_3 = 42 \\ \div\ u_1, u_2, u_6 \end{cases}$

$$\text{Mà} \begin{cases} a_1 = u_1 \\ a_2 = u_2 \\ a_3 = u_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1q = a_1 + d \\ a_1q^2 = a_1 + 5d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(q - 1) = d \\ a_1(q^2 - 1) = 5d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q - 1}{q^2 - 1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{q + 1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow q = 4$$

Từ $a_1 + a_2 + a_3 = 42 \Leftrightarrow a_1(1 + q + q^2) = 42 \Rightarrow a_1 = 2$.
ĐS : ∺ 2 ; 8 ; 32 ; ...

178. Phần đầu làm giống bài 175. Sau đó dùng công thức S_n của CSC.
ĐS : $n = 10$.

179. Tóm tắt đầu bài ; $\begin{cases} \div\div\ a_1, a_2, a_3 \text{ và } a_1 + a_2 + a_3 = 217 \\ \div\ u_2, u_9, u_{44} \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} a_1 = u_2 \\ a_2 = u_9 \\ a_3 = u_{44} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = u_1 + d \\ a_2 = u_1 + 8d \\ a_3 = u_1 + 43d \end{cases}$

Theo tính chất CSN : $a_1 a_3 = a_2^2 \Leftrightarrow (u_1 + d)(u_1 + 43d) = (u_1 + 8d)^2$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{3}{4}d.$$

Từ giả thiết $a_1 + a_2 + a_3 = 217 \Leftrightarrow (u_1 + d) + (u_1 + 8d) + (u_1 + 43d) = 217$
$\Rightarrow d = 4$ và $u_1 = 3$.

Sau đó dùng công thức S_n của CSC ta tìm được $n = 20$.

180. Tóm tắt đầu bài : $\begin{cases} \div\ a, b, c \\ \div\div\ b, c, d \\ a + d = 37,\ b + c = 36 \end{cases}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+)$

Theo tính chất CSC : $a + c = 2b \Leftrightarrow a + b + c = 3b$
$\Leftrightarrow 37 - d + 36 = 3b \Rightarrow d = 73 - 3b$
Từ $b + c = 36 \Rightarrow c = 36 - b$
Theo tính chất CSN : $c^2 = bd \Leftrightarrow (36 - b)^2 = b(73 - 3b)$
$\Leftrightarrow 4b^2 - 145b + 36^2 = 0 \Rightarrow b = 16$.
ĐS : $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$, $d = 25$.

181. Tóm tắt đầu bài : $\begin{cases} \div\div\ a, b, c \\ \div\ b, c, d \\ a + d = 14,\ b + c = 12 \end{cases}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+)$

Từ $b + c = 12 \Rightarrow b = 12 - c$
Theo tính chất CSC : $b + d = 2c \Leftrightarrow b + d + c = 3c$
$\Leftrightarrow 12 + 14 - a = 3c \Rightarrow a = 26 - 3c$
Theo tính chất CSN : $b^2 = ac \Leftrightarrow (12 - c)^2 = (26 - 3c)c$
$\Leftrightarrow 2c^2 - 25c + 72 = 0 \Rightarrow c = 8$
ĐS : Bốn số phải tìm là : $a = 2$; $b = 4$; $c = 8$; $d = 12$

182. Tóm tắt đầu bài : $\begin{cases} \div\div\ a_1, a_2, a_3 > 0 \\ \div\ a_1, a_2 + 4, a_3 \\ \div\div\ a_1, a_2 + 4, a_3 + 32 \end{cases}$

Theo tính chất CSN và CSC, ta có :

$$a_2^2 = a_1a_3,\ a_1 + a_3 = 2(a_2 + 4)\ \ ;\ a_1(a_3 + 32) = (a_2 + 4)^2$$

$\Leftrightarrow a_1a_3 + 32a_1 = a_2^2 + 16 + 8a_2 \Leftrightarrow 2 + a_2 = 4a_1$

$\Leftrightarrow a_2 = 4a_1 - 2.$

Từ $a_1 + a_3 = 2(a_2 + 4) \Leftrightarrow a_1 + a_3 = 2(4a_1 - 2 + 4)$

$\Leftrightarrow a_3 = 7a_1 + 4.$

Từ $a_2^2 = a_1a_3 \Leftrightarrow (4a_1 - 2)^2 = a_1(7a_1 + 4)$

$\Leftrightarrow 9a_1^2 - 20a_1 + 4 = 0 \Rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 6,\ a_3 = 18.$

183. Ta có :

$$\begin{matrix} a = u_1 + (m-1)d = a_1q^{m-1} \\ b = u_1 + (n-1)d = a_1q^{n-1} \\ c = u_1 + (p-1)d = a_1p^{p-1} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a - b = (m-n)d \\ b - c = (n-p)d \\ c - a = (p-m)d \end{matrix}$$

$a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b} = (a_1q^{m-1})^{(n-p)d}(a_1q^{p-1})^{(p-m)d}(a_1q^{p-1})^{(m-n)d}$

$= a_1^{(n-p)d+(p-m)d+(m-n)d}q^{(m-1)(n-p)d+(n-1)(p-m)d+(p-1)(m-n)d}$

$= a_1^o.q^o = 1$

184. Gọi x là chữ số hàng đơn vị ($x \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9$) và q là công bội, ta có :

∺ xq^2, xq, x (1), $\div\ xq^2 + 1, xq + 2, x + 1$ (2)

$100q^2 + 10xq + x - 594 = 100x + 10xq + xq^2$

$\Leftrightarrow x(q^2 - 1) = 6$ (3). Theo tính chất CSC, ta có :

$2(xq + 2) = (x + 1) + (xq^2 + 1) \Leftrightarrow (q^2 - 2q + 1) = 2$

$\Leftrightarrow x(q - 1)^2 = 2$ (4)

Chia (3) cho (4) được $\frac{q+1}{q-1} = 3 \Rightarrow q = 2$ và $x = 2$.

Chữ số hàng trăm phải lớn hơn 5 (vì phải lớn hơn 594) nên số phải tìm là 842.

185. $\left.\begin{matrix} \div\ 1, a, b \\ \div\div\ 1, a^2, b^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b = 2a \\ a^4 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 1 \\ a^4 = 4a^2 - 4a + 1 \end{cases}$ (1)

Từ (1) ta có : $a^4 - 4a^2 + 4a - 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2 + 2a - 1) = 0$.

$\Leftrightarrow a = 1,\ a = -1 + \sqrt{2},\ a = -1 - \sqrt{2}$

Suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases};\ \begin{cases} a = -1 + \sqrt{2} \\ b = 2\sqrt{2} - 3 \end{cases},\ \begin{cases} a = -1 - \sqrt{2} \\ b = -(2\sqrt{2} + 3) \end{cases}.$

186. Muốn a, b, c lập thành cấp số nhân thì $b^2 = ac$ và $b \neq 0$

Theo giả thiết $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

$\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2 = a^2b^2 + 2acb^2 + b^2c^2$

$\Rightarrow a^2c^2 + b^4 = 2acb^2 \Rightarrow a^2c^2 + b^4 - 2acb^2 = 0$

$\Rightarrow (b^2 - ac)^2 = 0 \Rightarrow b^2 = ac$. Vậy ta có $\div$ a, b, c.

187. a) Định nghĩa. Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước kể từ số hạng nào đó trở đi. Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ viết tắt là $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$.

b) Định nghĩa : Số $L \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ nếu $\lim(u_n - L) = 0$. Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = L$, viết tắt là $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

c) Định nghĩa : • Ta nói rằng dãy số u_n có giới hạn là $+\infty$, nếu mọi số hạng của dãy đều lớn hơn một số dương tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi. Khi đó, ta viết $\lim(u_n) = +\infty$ viết tắt là $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.

Chú ý

Người ta chứng minh được :

a) Nếu k là số nguyên dương thì $\lim k^n = +\infty$, đặc biệt $\lim n = +\infty$.

b) $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

• Ta nói rằng dãy số u_n có giới hạn là $-\infty$, nếu mọi số hạng của dãy đều nhỏ hơn một số âm tuỳ ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi. Khi đó viết $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$, viết tắt là $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$

Chú ý

a) Các dãy có giới hạn ở $+\infty$ hay $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần tới vô cực.

b) Dãy số có giới hạn là số thực L được gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

188. • *Định lí 1.* (điều kiện cần). Nếu một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.

• *Định lí 2.* (điều kiện đủ). Một dãy tăng và bị chặn trên thì có giới hạn. Một dãy giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

• *Định lí 3.* (tính duy nhất của giới hạn). Nếu một dãy có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

189. *Định lí 1.* Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

a) $\lim |u_n| = |L|$.

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 2. Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là hằng số. Khi đó

a) Các dãy số $(u_n + v_n)$, (cu_n), (u_nv_n) có giới hạn và

$\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$

$\lim(cu_n) = cL$

$\lim(u_nv_n) = LM$.

b) Nếu $M \neq 0$, thì dãy số $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ có giới hạn và $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$

Định lí 3. Cho 3 dãy số (u_n), (v_n), (w_n) và số thực L

Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì dãy số v_n có giới hạn và $\lim v_n = L$

190. Có $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Ta nhận thấy : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, nên :

$$\begin{array}{rl}
& \dfrac{1}{1.2} = 1 - \dfrac{1}{2} \\
& \dfrac{1}{2.3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \\
+ & \dfrac{1}{3.4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} \\
& \ldots \\
& \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \\
\hline
& S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}
\end{array}$$

Dãy số $(S_n) = \dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{3}{4}\,;\ \ldots\,;\ \dfrac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

191. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\left(4 - \dfrac{7}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{9}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}\right)} = \infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\,\dfrac{2n-1}{n}.\dfrac{3n-2}{n}}{n^3\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)\left(3 - \dfrac{2}{n}\right)}{\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^3} = \dfrac{2.3}{2^3} = \dfrac{3}{4}$.

192. a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}}-\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}\right)}{n^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}\right)}=\frac{0}{1}=0\ ;$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}-2\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}.$$

193. a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n[n^2+1-(n^2-2)]}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}}=\frac{3}{2}$$

Dựa vào hằng đẳng thức $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3-2n^2)-n^3}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1\right)}=-\frac{2}{3}.$$

c) Dùng hằng đẳng thức : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n[(n-n^3)+n^3]}{\sqrt[3]{(n-n^3)^2}-n\sqrt[3]{n-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-1}+1\right)}=\frac{1}{3}$$

194. a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^5}}\right)}{n.4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^5}}\right)=0$$

vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}\dfrac{\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]} = \dfrac{1}{3}$

195. a) Ta biết $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Tổng của cấp số nhân vô hạn với $|q| < 1$) là

$$S_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{u_1q^n}{1-q}$$

$$= \frac{u_1}{1-q} \text{ (do } \lim_{n\to\infty}\frac{u_1q^n}{1-q} = 0 \text{ vì } \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ (với } |q| < 1))$$

Do đó $S = \dfrac{u_1}{1-q}$ (với $|q| < 1$).

b) Số e = $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Người ta đã chứng minh được e là số vô tỉ và e = 2,7182818284...

196. a) $S = 1 + p + p^2 + ... + p^n + ...$ mà $1, p, p^2, ..., p^n$ là cấp số nhân có công bội $q = p$, $|p| < 1$ do đó công bội $|q| < 1$

Vậy $S = \dfrac{u_1}{1-q} \Rightarrow S = \dfrac{1}{1-p} \Rightarrow p = \dfrac{S-1}{S}$.

Tương tự $T = \dfrac{1}{1-q} \Rightarrow q = \dfrac{T-1}{T}$.

b) $\div$ 1, pq, $p^2q^2, ..., p^nq^n, ...$ là cấp số nhân có công bội $q^* = pq$ $|q^*| < 1$ (do $q^* = pq$ mà $|p| < 1, |q| < 1$, nên $|q^*| < 1$)

Gọi $\overline{S}$ là tổng vô hạn của cấp số nhân này thì ta có :

$$\overline{S} = \frac{1}{1-pq} = \frac{1}{1-\dfrac{S-1}{S}.\dfrac{T-1}{T}} = \frac{ST}{S+T-1}$$

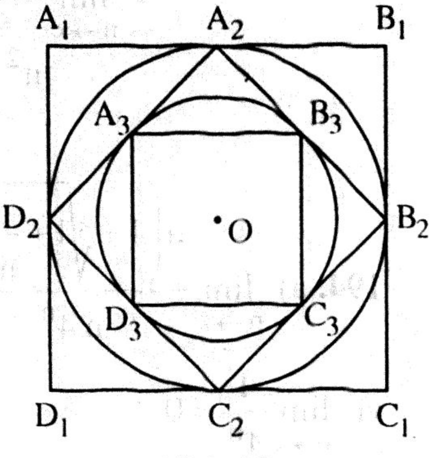
197. a) Chu vi hình vuông $A_1B_1C_1D_1 = 4$.

Dễ dàng tính được chu vi hình vuông $A_2B_2C_2D_2 = 2\sqrt{2}$

Chu vi hình vuông $A_3B_3C_3D_3 = 2$

...

Ta được một dãy số



Hình 12

$4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}...$

Đó là một cấp số nhân lùi vô hạn $U_1 = 4$, $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $S = \dfrac{4}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 4(2 + \sqrt{2})$.

b) Tương tự như trên diện tích các hình vuông là một cấp số nhân :

∺ $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}...$ $u_1 = 1$; $q = \dfrac{1}{2}$ nên

$S = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$.

c) Chu vi đường tròn nội tiếp hình vuông $A_1B_1C_1D_1$: π

Chu vi đường tròn nội tiếp hình vuông $A_2B_2C_2D_2$: $\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Chu vi đường tròn nội tiếp hình vuông $A_3B_3C_3D_3$: $\pi.\dfrac{1}{2}$

Vậy ta có dãy $\pi, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi, \dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi, ...$

đó là một cấp số nhân có $u_1 = \pi$, $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nên $S = \dfrac{\pi}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \pi(2 + \sqrt{2})$.

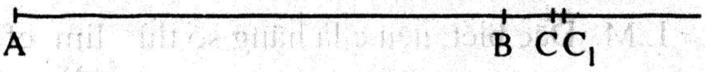
d) Tương tự như c) ta có cấp số nhân

∺ $\dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{8}\pi, \dfrac{1}{16}\pi, ...$ với $u_1 = \dfrac{1}{4}\pi$, $q = \dfrac{1}{2}$

nên $S = \dfrac{\dfrac{1}{4}\pi}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\pi$

198. Lúc đầu người đi mô tô cách người đi bộ 1 km đó là quãng đường AB.

Khi người đi xe máy đi hết quãng đường AB thì người đi bộ đi được quãng đường $BC = \dfrac{1}{10}AB$.



Hình 13

Khi người đi xe máy đi hết quãng đường BC thì người đi bộ đi được quãng đường $CC_1 = \frac{1}{10}BC$.

Vậy người đi xe máy đuổi kịp người đi bộ thì người đi xe máy đã đi qua các quãng đường AB, BC, CC_1, C_1C_2... với tổng độ dài $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$

Thực chất là tìm tổng S_n khi $n \to \infty$ của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, $q = \frac{1}{10}$. Do đó :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1{,}111 \text{ (km)}$$

199. Định nghĩa 1. Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng K, có thể trừ ở điểm $x_0 \in K$. Hàm số f(x) có giới hạn L (hay dần tới L) ; khi x dần tới x_0, nếu với mọi dãy số (x_n) ($x_n \in K$, $x_n \neq x_0$ $\forall n \in N^*$) sao cho khi $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ (hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$).

200. • Định nghĩa 2. Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng $(a ; +\infty)$. Ta nói rằng hàm số f(x) có giới hạn là $L \in \mathbb{R}$ khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a ; +\infty)$ (tức là $x_n > a$ với mọi n) mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

• Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm được định nghĩa như định nghĩa 1.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ có nghĩa là với mọi dãy số (x_0)

($x_n \in K$, $x_n \neq x_0$ $\forall n \in N^*$) sao cho khi $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = +\infty$

Chẳng hạn $\lim\limits_{x\to 2} \frac{5}{(x-2)^2} = +\infty$

201. *Định lí 1.* Nếu hàm số f(x) có giới hạn L khi $x \to x_0$ thì giới hạn đó là duy nhất.

Định lí 2. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, $(L, M \in \mathbb{R})$

Khi đó :

a) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = L.M$. Đặc biệt, nếu c là hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = cL$.

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$.

Có thể nói giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác 0)

Định lí 3. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Khi đó

- $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$
- Nếu $f(x) \geq 0$ với $x \neq x_0$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Định lí 4. Giả sử f, g, h là ba hàm số xác định trên một khoảng (a ; b) chứa điểm x_0, có thể không xác định tại x_0. Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với $\forall x \in (a\,;\,b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ $(L \in \mathbb{R})$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$

202. 1) Số L được gọi là *giới hạn bên phải* của hàm số f(x) khi $x \to x_0$ về bên phải, kí hiệu $L = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Số L được gọi là *giới hạn bên trái* của hàm số f(x) khi $x \to x_0$ về phía bên trái, kí hiệu $L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

2) Có hai quy tắc tìm giới hạn ở vô cực.

- Quy tắc 1

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)]$ được cho trong bảng sau :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	−	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	−	$+\infty$

- Quy tắc 2

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau

Dấu của L	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	−	$-\infty$
−	+	$-\infty$
−	−	$+\infty$

203. Khi tìm giới hạn của các biểu thức, ta thường gặp một số trường hợp như :

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ mà $u(x)\to 0$, $v(x)\to 0$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ mà $u(x)\to \infty$, $v(x)\to \infty$.

c) $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]$ mà $u(x)\to 0$, $v(x)\to \infty$.

d) $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-v(x)]$ mà $u(x)\to \infty$, $v(x)\to \infty$.

Những trường hợp này ta gọi là các dạng vô định :

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty.$$

Việc tìm giới hạn của các biểu thức khi gặp các dạng này được gọi là *khử dạng vô định*, và được tiến hành bằng cách dùng các định lí về giới hạn, kết hợp với các phép biến đổi đại số (và lượng giác ở lớp 11).

Dưới đây ta xét cách khử dạng vô định từng loại.

a) Loại 1 : Dạng $\dfrac{0}{0}$. Ta thường gặp hai dạng sau đây :

– *Dạng tử và mẫu đều là những đa thức nguyên.* Ở dạng này, ta phải phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nhân tử này thường là $x - x_0$ nếu tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ sau đó giản ước nhân tử chung để làm mất dạng $\dfrac{0}{0}$.)

Ví dụ 1. Tìm giới hạn : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=A$

Giải. Thay x = 1 vào tử và mẫu, ta thấy có dạng $\dfrac{0}{0}$. Ta làm như sau :

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

– *Dạng tử (hoặc mẫu, hoặc cả tử và mẫu) có chứa căn thức*. Để làm mất dạng $\frac{0}{0}$ ở loại này, ta phải nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp của tử (hoặc của mẫu, hoặc của cả tử và mẫu) theo các dạng sau :

$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$$

$$\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a^3-b$$

$$\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a^3+b$$

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$$

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b$$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)-(x^2+x+1)}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=B$

Giải. Thay x = 0 vào tử và mẫu ta thấy dạng $\frac{0}{0}$. Ta thấy có dạng như sau :

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-(x^2+x+1)}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=0.$$

Ví dụ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}}{x^2-1}=C$

Giải. Thay x = 1 vào, ta thấy có dạng $\frac{0}{0}$. Ta làm như sau :

$$C=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)+(x^2-x+1)}{(x^2-1)\underbrace{\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)(x^2-x+1)}+\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}\right]}_{P(x)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)P(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{P(x)}=\frac{1}{3}.$$

b) *Loại 2*. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Ta cũng gặp dạng tử và mẫu là những đa thức nguyên, hoặc có chứa căn thức. Cách tìm giống như tìm giới hạn của dãy số.

Ví dụ 4. Tìm giới hạn : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x}{14x+1+\sqrt{16x^2+x+1}}$

Giải. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x}{x\left[14+\dfrac{1}{x}+\sqrt{16+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right]}=\dfrac{7}{14+\sqrt{16}}=\dfrac{7}{18}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{x\left[14+\dfrac{1}{x}-\sqrt{16+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right]}=\frac{7}{14-\sqrt{16}}=\frac{7}{10}$$

Vì khi x → −∞ thì $\sqrt{16x^2+x+1}=-x\sqrt{\dfrac{16x^2+x+1}{x^2}}$

c) Loại 3. Dạng 0. ∞. Cách tìm giống như tìm giới hạn của dãy số.

Ví dụ 5. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x-x^3}+x\right)$

Giải. Dùng hằng đẳng thức liên hợp :

$$\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-b\sqrt[3]{a}+b^2\right)=a+b^3$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left[(x-x^3)+x^3\right]}{\sqrt[3]{(x-x^3)^2}-x\sqrt[3]{x-x^3}+x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)^2-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-1}+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^2-\sqrt[3]{-1}+1}}=\frac{1}{3}$$

d) Loại 4. Dạng ∞ − ∞. Cách tìm cũng như giới hạn của dãy số.

Ví dụ 6. Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$$

Giải.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)^2-(4x^2-4x-3)}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x-3}}=\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x\left(2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{4-\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}\right)}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)=-\infty.$$

Ví dụ 7. Tính giới hạn :

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$ *(Trích đề thi vào ĐH Sư phạm Hà Nội – B– 2000)*

Giải : Ta có : $\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}=\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2+2-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$

Vậy

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+7-8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}+\lim_{x\to 1}\frac{4-(5-x^2)}{(x-1)\left(2+\sqrt{5-x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4}+\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2+\sqrt{5-x^2}}=\frac{1}{12}+\frac{2}{4}=\frac{7}{12}.$$

204. a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{4}{5}.$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+5)}{(x-4)(x+4)}=\frac{9}{8}.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(3x^2+2x+1)}{(x-1)^2}=6.$

205. a) $$\lim_{x\to 1}\frac{(3x-2)^2-(4x^2-x-2)}{(x^2-3x+2)\underbrace{\left(3x-2+\sqrt{4x^2-x-2}\right)}_{Q(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-11x+6}{(x^2-3x+2).Q(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(5x-6)}{(x-1)(x-2).Q(x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x-6}{(x-2)\left(3x-2+\sqrt{4x^2-x-2}\right)}=\frac{5-6}{-(1+\sqrt{1})}=\frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x^2-1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=-\frac{2}{3}.$$

206. a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(4-\frac{1}{x}\right)^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\left(4-\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{1}{64}.$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(2-\frac{1}{x^3}\right)\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^4\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\infty.$$

207. a) $$\lim_{x\to+\infty} x\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)=-\infty .$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(3-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\left(3+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty .$$

c) $$\lim_{x\to\infty} x^2\frac{(x^3+1)-x^3}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+1\right)}=\frac{1}{3}$$

208. a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt[3]{x^4}\underbrace{\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}\right]}_{P(x)}}$$

$$P=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt[3]{x}}}{P(x)}=0.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x-1)-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=-\frac{5}{2}.$$

209. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]=$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2[(1+x)-1]}{x(\sqrt{1+x}+1)}+\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt[3]{8-x})[2^2+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\,]}{x[2^2+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\,]}$$

$$= 1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.$$

210. $$\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-3x-1}{(x^2-1)(2x+\sqrt{3x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x+1}{(x+1)(2x+\sqrt{3x+1})}=\frac{5}{8}.$$

211. a) Đặt $t=\dfrac{\pi}{4}-x$ thì $x=\dfrac{\pi}{4}-t$, tính f(x) theo t ta có

$$f(x)=\tan 2x.\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\tan t$$

$$=\cot 2t.\tan t=\frac{\cos 2t.\sin t}{\sin 2t.\cos t}=\frac{\cos 2t}{2\cos^2 t}\ ;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t}{2\cos^2 t}=\frac{1}{2}.$$

b) $$f(x)=\frac{3^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{e^{x^2\ln 3}-1}{x^2.\ln 3}.\ln 3+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2.\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2\ln 3}-1}{x^2.\ln 3}.\ln 3+\frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1.\ln 3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\ln 3.$$

212. Hàm số f(x) được gọi là liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu :

a) x_0 là điểm thuộc tập xác định của hàm số.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

213. Hàm số f(x) được gọi là liên tục trên khoảng (a ; b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Đồ thị của nó là một đường "cong" liền trên khoảng (a ; b)

214. Hàm số f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a ; b] nếu nó liên tục trên khoảng (a ; b) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

215. • Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

• Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai phân thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

• Người ta thừa nhận định lí các hàm số lượng giác sinx, cosx, tanx, cotx liên tục trên tập xác định của chúng.

216. Định lí. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn [a ; b]. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì mỗi số thực M nằm giữa f(a) và f(b), tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a\,;\,b)$ sao cho $f(c) = M$.

Hệ quả. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a ; b] và $f(a).\,f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a\,;\,b)$ sao cho $f(c) = 0$. Ứng dụng hệ quả này để chứng minh một phương trình nào đó có nghiệm.

217. Hàm số f(x) liên tục với mọi $x \neq 1$. Ta xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$.

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+6)}{x-1} =$$
$$\lim_{x\to1}(x+6) = 7$$

Mặt khác $f(1) = 7$. Vậy $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(x) = 7$. Nên hàm số f(x) liên tục tại điểm $x = 1$. Do đó hàm số liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

218. Ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{(1-x^2)-1}{x(\sqrt{1-x^2}+1)} = \lim_{x\to0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}+1} = 0.$$

Vì vậy nếu $a = 0$ thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

219. Đặt $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$, ta có $f(0) = -10$, $f(5) = 10 \Rightarrow f(0).f(5) < 0$ mà $f(x) = x^3 - 6x^3 + 9x - 10$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên đoạn [0 ; 5]. Như vậy trên đoạn [0 ; 5] tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0\,;\,5)$ để $f(c) = 0 \Leftrightarrow c^3 - 6c^2 + 9c - 10 = 0 \Rightarrow c$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

220. a) Ta có $f(0) = 0$; $f(1) = -1$. Mặt khác :

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = f(0) = 0,\quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^2 = 0 = f(0).$$

Vậy hàm đã cho liên tục tại $x = 0$.

Xét $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x^2 = 1 \neq f(1)$. Vậy hàm đã cho không liên tục tại $x = 1$.

b) Có $f(0) = 1$,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(3-x) = 3 \neq f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + 1) = 1 = f(0)$$

Vậy hàm đã cho liên tục bên trái tại điểm x = 0 và không liên tục bên phải tại điểm đó.

c) Có $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + \dfrac{x}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + \dfrac{x}{x}\right) = 2 = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 - \frac{x}{x}\right) = 0 \neq f(0).$$

Vậy hàm đã cho liên tục bên phải tại điểm x = 0 và không liên tục bên trái tại điểm đó.

221. Ta dễ dàng nhận thấy chỉ cần xét sự liên tục của hàm đã cho tại các điểm $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Ta có $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} (-2\sin x) = 2$,

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (a\sin x + b) = -a + b$$

Để hàm liên tục tại $x = -\dfrac{\pi}{2}$, ta phải có: $-a + b = 2 = f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Mặt khác : $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (a\sin x + b) = a + b, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$$

Để hàm liên tục tại $x = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, thì $a + b = 0 = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) cho $a = -1$, $b = 1$.

222. a) Đặt VT = f(x), có $f(0) = 2$, $f(-7) = -152$. Hàm f(x) liên tục trên đoạn $(-7 ; 0)$ nên có $c \in (-7 ; 0)$ để $f(c) = 0$.

b) Đặt VT = f(x), có $f(0) = -20$; $f(3) = 97$.

223. $f(1) = \cos 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \cos x = \cos 1 = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2 + x + 1) = 3 \neq f(1)$$

Vậy hàm đã cho liên tục bên phải và không liên tục bên trái tại điểm x = 1. Ngoài ra, với x < 1 hay x > 1, hàm f(x) là hàm sơ cấp nên xác định trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra hàm đã cho liên tục trong các khoảng $(-\infty ; 1)$ và liên tục trong nửa khoảng $[1 ; +\infty)$.

224. $f(x) = \quad |x|$

Với $x > 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{x} = x^2$

Với $x < 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{-x} = -x^2$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

nên $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

nếu f(0) = 0 thì hàm f(x) sẽ liên tục tại 0 và do đó hàm số liên tục trên **R**.

Hay hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{|x|} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$

liên tục trên **R**.

225. Hàm số $f(x) = \dfrac{|x|}{x}\ (x \neq 0)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

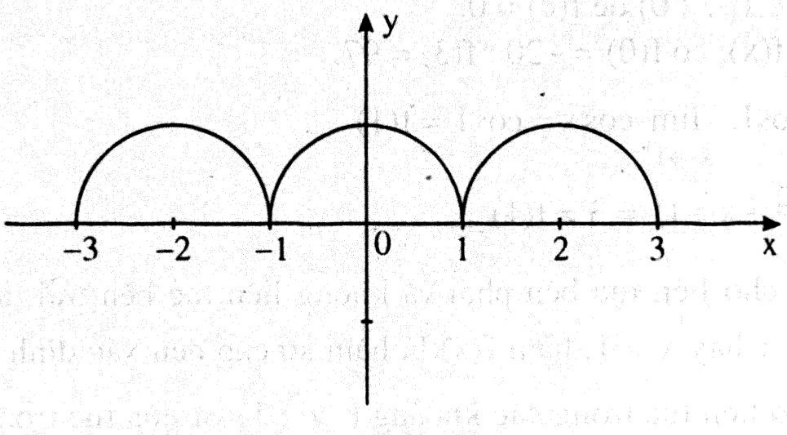
Vậy $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ nên có xác định f(0) = 1 thì hàm f(x) cũng không liên tục tại x = 0. Do vậy hàm số f(x) không thể liên tục trên toàn bộ **R** được.

226. Hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, X = [−1, 1] và $f(x) \geq 0$

Ta có : $f^2(x) + x^2 = 1$

Đồ thị của f(x) là nửa đường tròn tâm là gốc toạ độ bán kính R = 1.

Muốn hàm số này liên tục và xác định trên **R** thì chỉ cần dịch chuyển đường tròn này về bên phải và bên trái hai đơn vị. Ta có hàm $F(x) = \sqrt{1 - (x - 2a)^2}$ $(a \in \mathbf{Z})$.



Hình 14

227. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ (hay $y'(x_0)$) là giới hạn hữu hạn (nếu có) giữa số gia của hàm số Δy, và số gia của biến số Δx tại điểm x_0 khi số gia của đối số dần tới 0, tức là

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

228. Muốn tìm đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0, ta phải qua hai bước sau :

Bước 1. Tính Δy theo công thức $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Bước 2. Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

229. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên J nếu nó có đạo hàm tại mỗi điểm x_0 bất kì thuộc J.

230. Định lí. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có :

a) Nếu $f(x) = c$ (c là hằng số) thì $f'(x) = 0$.
b) Nếu $f(x) = x$ thì $f'(x) = 1$.
c) Nếu $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ thì $f'(x) = nx^{n-1}$.
d) Nếu $f(x) = \sqrt{x}$ thì $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

231. • Ý nghĩa hình học : Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$. Dựa vào điều này suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$ là

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

• Ý nghĩa vật lí : * Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 (hay còn nói vận tốc tại thời điểm t_0) của một chất điểm chuyển động với phương trình $S = S(t)$ là $v_{(t_0)} = S'_{(t_0)}$

* Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 (hay còn nói cường độ tại thời điểm t_0) của một dòng điện với điện lượng $q = q(t)$ là $i(t_0) = q'_{(t_0)}$

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm $x_0 = 1$.
Giải

$y' = 3x^2 \Rightarrow y'_{(1)} = 3$, $y_{(1)} = 1$. Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại $x_0 = 1$ là : $y = 3(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Ví dụ 2. Cho một chất điểm chuyển động với phương trình $S = 5t^2 + 2t + 1$ (S tính bằng mét, t tính bằng giây)

Tìm vận tốc của chuyển động tại thời điểm t = 3s.

$V_t = S'_{(t)} = 10t + 2 \Rightarrow v_{(3)} = S'_{(3)} = 32$ (m/s)

232. a) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(1 + \Delta x) - 1 - 2 = 3\Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3 \Rightarrow f'_{(1)} = 3$$

b) $\Delta y = 2(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) - 14$

$= 8 + 8\Delta x + 2\Delta^2 x + 6 + 3\Delta x - 14 = 2\Delta^2 x + 11\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta^2 x + 11\Delta x}{\Delta x} = 2\Delta x + 11$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2\Delta x + 11) = 11 \Rightarrow f'_{(2)} = 11.$$

c) $y = 2\sqrt{x}$, $\Delta y = 2\sqrt{1 + \Delta x} - 2$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{1 + \Delta x} - 2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt{1 + \Delta x} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\left(\sqrt{1 + \Delta x} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \Delta x} + 1\right)}{\Delta x\left(\sqrt{1 + \Delta x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{1 + \Delta x} + 1\right)} = 1 \Rightarrow f'_{(1)} = 1.$$

233. $$f'_{(0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{1 + |\Delta x|}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{1 + |\Delta x|} = 1.$$

234. a) $y = 2x - 1$

Tính số gia Δy của hàm số ứng với số gia Δx của đối số :

$$\Delta y = 2(x_0 + \Delta x) - 2x_0 = 2\Delta x$$

Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

Tìm giới hạn: $y'_{(x_0)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

Kết luận $y'_{(x_0)} = 2$ hay $y'_{(x)} = 2$.

b) $y = -x^2 + x$ làm tương tự như a) ta có $y'_{(x)} = -2x + 1$.

c) $y = x^3$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = \Delta x[(x_0 + \Delta x)^2 + x_0(x_0 + \Delta x) + x_0^2]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x_0 + \Delta x)^2 + x_0(x_0 + \Delta x) + x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 3x_0^2$$

Vậy $y'_{(x_0)} = 3x_0^2$ hay $y'_{(x)} = 3x^2$.

d) $y = \sqrt{2x}$

$$\Delta y = \sqrt{2(x_0 + \Delta x)} - \sqrt{2x_0}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2(x_0 + \Delta x)} - \sqrt{2x_0}}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2(x_0 + \Delta x)} + \sqrt{2x_0})}.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2\sqrt{2x_0}} = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}$$

Vậy $y'_{(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}$ hay $y'_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

e) $y = \frac{3}{x} \Rightarrow y' = -\frac{3}{x^2}$.

d) $y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

235. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong (C) là đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $x_0 \in (C)$; $k = f'_{(x_0)}$

Tiếp tuyến tại $x_0 \in (C)$ có pt : $y = f'_{(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

a) $f'(x) = 2x$, $f'(2) = 4$, $f'(3) = 6$
b) $f(2) = 5$; $f(3) = 10$.
Vậy pt tiếp tuyến tại điểm (2 ; 5) : $y = 4(x - 2) + 5$
$y = 4x - 3$
Phương trình tiếp tuyến tại điểm (3 ; 10) : $y = 6(x - 3) + 10$
$y = 6x - 8$.

236. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -5x + 1$ có $k = -5$
Tiếp tuyến tại điểm x_0 thuộc đường cong (C) có hệ số góc là :

$$k = f'_{(x_0)} = 2x_0$$

Nên ta có $2x_0 = -5 \Rightarrow x_0 = -\frac{5}{2}$

Tiếp tuyến tại điểm $x_1 \in (C)$ có hệ số góc : $k = f'_{(x_1)} = 2x_1$

Tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3} - 2$ nên $k.\frac{1}{3} = -1$ hay $2x_1.\frac{1}{3} = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}$.

237. Ta đã biết vận tốc (V_t) là đạo hàm của quãng đường S(t) :

$$V_t = S'(t)$$

a) $S'(t) = 2t - 1$ nên $V_t = 2t - 1$.

b) $v_{(1)} = 1\frac{\text{đvd}}{\text{sec}}$

$v_{(3)} = 5\frac{\text{đvd}}{\text{sec}}$.

c) $v_t = 0 \Rightarrow 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}\text{sec}$.

238. *Định lí 1.* Nếu các hàm số U(x) và V(x) có đạo hàm trên J thì tổng và hiệu của chúng cũng có đạo hàm trên J và

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$$

Chứng minh

Đầu tiên ta chứng minh $(u + v)' = u' + v'$

Giả sử có hàm số $y = u(x) + v(x)$. Tính y'.

Với x_0 là số bất kì thuộc J cho x_0 một số gia Δx ta có :

- $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$
  $= [u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x)] - [u(x_0) + v(x_0)]$
  $= [u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)] = \Delta u + \Delta v$
- $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$

Vậy $y'_{(x_0)} = u'_{(x_0)} + v'_{(x_0)}$ vì x_0 là số bất kì thuộc J nên $y' = u' + v'$

Chứng minh tương tự ta được $(u - v)' = u' - v'$

Ví dụ : $(5x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1)' = 5(x^4)' - 7(x^3)' + 2(x^2)' + \frac{1}{3}(x)' + (1)'$

$$= 20x^3 - 21x^2 + 4x + \frac{1}{3} + 0.$$

239. 240. HS tự làm : $(uv)' = u'v + v'u$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$.

241. Nếu $y = f(u)$ và $u = u(x)$ thì hàm số $y = f[u(x)]$ gọi là *hàm số hợp* của biến số x qua hàm số trung gian u (dĩ nhiên ta chỉ xét các giá trị của biến số x sao cho $f[u(x)]$ xác định)

242. *Định lí 4* (về đạo hàm hàm số hợp)

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $f(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = u(x_0)$ thì hàm số hợp $y = F(x) = f[u(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0 và $F'(x_0) = f'(u_0).\ u'(x_0)$.

Nếu điều này đúng với mỗi đểm x_0 bất kì thuộc J thì hàm số hợp $y = F(x) = f[u(x)]$ có đạo hàm trên J và

$F'(x) = f'[u(x)].\ u'(x)$

Hệ quả 1: $(u^n)' = nu^{n-1}.u'$

Hệ quả 2: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Ví dụ: $[(3x^2 + 1)^3]' = 3(3x^2 + 1)^2(3x^2 + 1)' = 18x(3x^2 + 1)^2$

243. a) $y' = 3 - 2x$, $y'(1) = 1$.

b) $y' = 4x^3 - 10x + 1$, $y'(2) = 4.2^3 - 10.2 + 1 = 13$.

244. a) $y' = x^3 + 5x^2 - 3x - 1$. b) $y' = 20a^2x^3 - 12ax^2 + 3a^3$.

c) $y' = \dfrac{3}{a}x^2 + \dfrac{4}{a^2}x - \dfrac{3}{a^3}$.

245. a) $y' = (3x^3)'(2x - 3) + 3x^3(2x - 3)'$

$= 9x^2.(2x - 3) + 3x^3.2 = 3x^2(6x - 9 + 2) = 3x^2(6x - 7)$.

b) $y' = \dfrac{1}{a+b}(ax + b)' = \dfrac{a}{a+b}$.

c) $y' = (x)'\,(2x - 1)\,(3x + 2) + x(2x - 1)'(3x + 2) + x(2x - 1)(3x + 2)'$

$= (2x - 1)(3x + 2) + 2x(3x - 2) + 3x(2x - 1)$

$= 6x^2 + x - 2 + 6x^2 - 4x + 6x^2 - 3x = 18x^2 - 6x - 2$.

246. a) Đặt $y = x^5 + 2x^2 \Rightarrow y = u^3$. Vậy $y' = 3u^2u'$.

$y' = 3(x^5 + 2x^2)^2.(5x^4 + 4x)$

b) $y' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(5 - 3x^2)'$

$= 2x(5 - 3x^2) + (x^2 + 1).\ (-6x)$

$= 2x(5 - 3x^2 - 3x^2 - 3) = 2x(2 - 6x^2) = 4x(1 - 3x^2)$

c) $y' = \dfrac{(x^2 - 1)(2x)' - (x^2 - 1)'.2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2(x^2 - 1) - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$.

d) $y' = \dfrac{(x^2+x+1)(5x-3)' - (x^2+x+1)'(5x-3)}{(x^2+x+1)^2}$

$= \dfrac{5(x^2+x+1)-(2x+1)(5x-3)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}.$

247. a) $y' = \dfrac{(1+3x)'}{2\sqrt{1+3x}} = \dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}}$

b) $y' = (x^3)'.\sqrt{x^3+2} + x^3(\sqrt{x^3+2})'$

$= 3x^2.\sqrt{x^3+2} + x^3.\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} = \dfrac{6x^2(x^3+2)+3x^5}{2\sqrt{x^3+2}} = \dfrac{9x^5+12x^2}{2\sqrt{x^3+2}}$

c) $y' = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}.(x)' - (\sqrt{a^2-x^2})'.x}{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}.x$

$= \sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

248. a) $y' = 5(1+3\sqrt{x})^4(1+3\sqrt{x})' = 5(1+3\sqrt{x})^4.\dfrac{3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{15(1+3\sqrt{x})^4}{2\sqrt{x}}$

b) $y' = (x^3)' - (x)' - [(x^3-x)^2]' = 3x^2 - 1 - 2(x^3-x)(3x^2-1)$

$= (3x^2-1)(1-2x^3+2x).$

249. $u'_{(x)} = \dfrac{(b-x)(b+x)' - (b-x)'(b+x)}{(b-x)^2} = \dfrac{b-x+b+x}{(b-x)^2} = \dfrac{2b}{(b-x)^2}$

$y'_{(u)} = \dfrac{(a-u)(a+u)' - (a-u)'(a+u)}{(a-u)^2} = \dfrac{a-u+a+u}{(a-u)^2} = \dfrac{2a}{(a-u)^2}$

$y'_{(x)} = y'_{(u)}.u'_{(x)} = \dfrac{2a}{(a-u)^2}.\dfrac{2b}{(b-x)^2}.$

$= \dfrac{2a}{\left(a-\dfrac{b+x}{b-x}\right)^2}.\dfrac{2b}{(b-x)^2} = \dfrac{4ab}{(ab-ax-b-x)^2}.$

250. $y' = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$

a) $y' > 0 \Rightarrow 6x(x-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2. \end{array}\right.$

b) $y' < 3 \Rightarrow 6x^2 - 12x - 3 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < x < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}.$

251. $y' = (x-1)(x-2)\ldots(x-2006) + x(x-2)(x-3)\ldots(x-2006) + \ldots +$
$+ x(x-1)(x-2)\ldots(x-2005)$

$y'_{(0)} = (-1).(-2).(-3)\ldots(-2006) = 2006!$

252. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

$$f(x) = x^2 + \frac{x(x-4)}{x-4} = x^2 + \forall x \neq 4$$

$f'(x) = 2x + 1$ đáp số A) đúng.

253. $f'(x) = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3 \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{3}$, đáp án A) đúng.

254. $f'(x) = 3\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2\left(m + \frac{n}{x^2}\right)' = 3\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2 . \left(\frac{-2n}{x^3}\right)$

$$= -\frac{6n}{x^3}\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2$$, đáp án C) đúng

255. $f'(x) = 3x^2 + 3$, $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, đáp án E) đúng

256. $f'(x) = x^2 + 3x + 2$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Đáp án C) đúng

257. Ta biết rằng phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$ là :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f(x) = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x^2 - 1).\ 2x = 4x(x^2 - 1)$

$f'(2) = 24$

$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 9$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y = 24(x - 2) + 9 \Leftrightarrow y = 24x - 39$$

Đáp án D đúng.

258. Ta đã biết một chuyển động mà quãng đường S là hàm số của thời gian t thì vận tốc của nó là S'(t). Nên $S = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow V(t) = S'(t) \Rightarrow V(t) = gt = 9{,}8t$

V(3) = 9,8.3 = 29,4(m/s). Đáp án C đúng.

259. Muốn hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ thì phải có :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) = x_0^2 \qquad (1)$$

Mặt khác theo cách cho hàm số ta có :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = ax_0 + b \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} x^2 = x_0^2 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $ax_0 + b = x_0^2$ (4)

Ta đã biết hàm số y = f(x) muốn có đạo hàm tại $x = x_0$ thì phải có $f'_{(x_0^+)} = f'_{(x_0^-)}$

$$f'_{(x_0^+)} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{a(x_0+\Delta x)-ax_0}{\Delta x} = a \quad (5)$$

$$f'_{(x_0^-)} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) $\Rightarrow a = 2x_0$

Thay vào 4 ta có $b = -x_0^2$

Như vậy để hàm số đã cho liên tục và có đạo hàm tại $x = x_0$ thì $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$.

260. $$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(97+\Delta x)-f(97)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(97+\Delta x)-f(97)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$

suy ra $f'(97^+) \neq f'(97^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại x = 97.

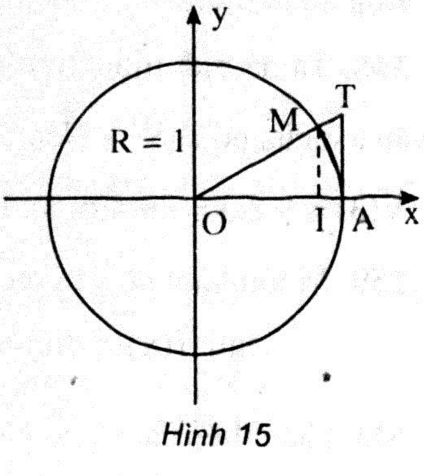
261. $f(x) = 2(x^{48} + x^{47} + \ldots x^3 + x^2 + x + 1)(48x^{47} + 47x^{46} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1)$

$[f(x)]' = 2[(48x^{47} + 47x^{46} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1)^2 + (x^{48} + x^{47} + \ldots + x^3 + x^2 + x + 1)$
$(48.47x^{46} + 47.46x^{45} + \ldots + 6x + 2)]$

262. Do $x \to 0$, ta xét $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và $x \neq 0$ (x dần tới 0, nhưng $x \neq 0$).

Ta phân biệt hai trường hợp

- Trường hợp $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Trên hình 15 ta có :



Hình 15

dt(ΔAOM) < dt(quạt OAM) < dt(ΔOAT)

Mà $dt\Delta AOM = \frac{1}{2}MI.OA = \frac{1}{2}\sin x$

$dt(\text{quạt } OAM) = \frac{\pi.OA^2}{2\pi}.x = \frac{1}{2}x$

$dt(\Delta OAT) = \frac{1}{2}OA.AT = \frac{1}{2}\tan x$

Vậy $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$ (do $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x > 0$).

Do đó ta có $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ (chia các vế của bđt cho sinx)

$\Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Ta biết $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (định lí).

263. Các công thức cần nhớ của đạo hàm hàm số lượng giác

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi)$	$(\sin u)' = u'\cos u$ $\cos u = -u'\sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

264. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{m}{n}.\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}.\frac{1}{1} = \frac{m}{n}$ (do $m.n \neq 0$).

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 5x}{3x} = \frac{\sin 5\frac{\pi}{2}}{3\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$.

c) Ta đã biết $A(x) \leq B(x)$ $\forall x$ mà $\lim\limits_{x\to\infty} B(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} A(x) = 0$

- $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$

mà $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|} = 0$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x.\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$.

265. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}$ dạng $\dfrac{0}{0}$;

$$\frac{x\sin 2x}{1-\cos^2 x}=\frac{2x\sin x\cos x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{4\cos\frac{x}{2}\cos x}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cos\frac{x}{2}\cos x}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=\dfrac{4}{1}=4$.

b) $$\frac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}=\frac{-1}{1}=-1.$$

c) $$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos y}{\dfrac{\sin y}{y}}$ (đặt $\dfrac{\pi}{2}-x=y$) $=\dfrac{1}{1}=1$.

266. a) $y'=(\sin 3x)'-(\cos 3x)'=3\cos 3x+3\sin 3x$.

b) $y'=\dfrac{\sin x(x)'-(\sin x)'.x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$.

c) $y'=3\sin^2 2x(\sin 2x)'=6\sin^2 2x\cos 2x$.

d) $y'=-\left(\dfrac{1}{x}\right)'\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$.

267. a) $$y' = \frac{\sin x(1+\tan x)' - (\sin x)'(1+\tan x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin x.\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x - \sin x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - \cos^3 x - \sin x\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}.$$

b) $$y' = (\cos^2 x)'\cot x + \cos^2 x(\cot x)'$$

$$= 2\cos x\sin x.\frac{\cos x}{\sin x} + \cos^2 x.\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = 2\cos^2 x - \cot^2 x.$$

c) $$y' = (\sin x)'\tan^2 x + (\tan^2 x)'\sin x = \cos x\tan^2 x + 2\tan x\frac{1}{\cos^2 x}\ \sin x$$

$$= \cos x\ \tan^2 x + 2\tan^2 x.\frac{1}{\cos x} = \tan^2 x\left(\cos x + \frac{2}{\cos x}\right).$$

d) $$y' = (\tan x)' + (\cot x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

268. a) $$y' = (x)'\cot x + x(\cot x)' = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}.$$

b) $$y' = \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)' + \left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)' = \frac{2x(\sin 2x)' - (2x)'\sin 2x}{(2x)^2} + \frac{\sin 2x(2x)' - (\sin 2x)'.2x}{\sin^2 2x}$$

$$= \frac{4x\cos 2x - 2\sin 2x}{4x^2} + \frac{2\sin 2x - 2x\cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

c) $$y' = \left(\frac{x+1}{2}\right)'\cos\frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{x+1}{2}$$

d) $$y' = \frac{(3+\tan 3x)(3x\sin 3x)' - (3+\tan 3x)'.3x\sin 3x}{(3+\tan 3x)^2}.$$

$$= \frac{(3+\tan 3x)(3\sin 3x + 9x\cos 3x) - \dfrac{3}{\cos^2 3x}.3x\sin 3x}{(3+\tan 3x)^2}$$

$$= \frac{9\sin 3x + 27x\cos 3x + \dfrac{3\sin^2 3x}{\cos 3x} + 9x\sin 3x - \dfrac{9x\tan 3x}{\cos 3x}}{(3+\tan 3x)^2}$$

$$= \frac{9\sin 3x\cos 3x + 27x\cos^2 3x + 3\sin^2 3x + 9x\sin 3x\cos 3x - 9x\tan 3x}{\cos 3x(3+\tan 3x)^2}$$

$$= \frac{3\sin 3x(3\cos 3x + \sin 3x) + 9x(3\cos^2 3x + \frac{1}{2}\sin 6x - \tan 3x)}{\cos 3x(3+\tan 3x)^2}.$$

269.

a) $y' = (\sqrt{1+x^2})'\cos\sqrt{1+x^2} = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$.

b) $y' = (\sqrt{1+x^2})'.\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\cos^2\sqrt{1+x^2}}$.

c) $y' = 2\sin(\cos 2x).(\cos 2x)' = -4\sin 2x\sin(\cos 2x)$.

d) $y' = 2\cos(\sin 2x)(\sin 2x)' = 4\cos 2x\cos(\sin 2x)$.

270. $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$; $g'(x) = 8x - \pi\sin\pi x$

$g'(1) = 8$

$\Rightarrow \dfrac{f'(1)}{g'(1)} = \dfrac{3}{8}$.

271. $f(x) = 2\cos^2(4x-1) \Rightarrow f'(x) = -16\cos(4x-1)\sin(4x-1)$

$= -8\sin 2(4x-1)$

mà $-1 \leq \sin 2(4x-1) \leq 1 \Rightarrow -8 \leq f'(x) \leq 8$

Vậy GTLN $f'(x) = 8$, GTNN $f'(x) = -8$.

272. $\sin^6x + \cos^6x + 3\sin^2x\cos^2x = (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x\cos^2x)$

$+ 3\sin^2x\cos^2x$

$= \sin^4x + \cos^4x + 2\sin^2x\cos^2x$

$= (\sin^2x + \cos^2x)^2 = 1$

suy ra $(\sin^6x + \cos^6x + 3\sin^2x\cos^2x)' = (1)' = 0$ (đpcm).

273. $f'(x) = 3\cos x - 4\sin x + 5$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x - 4\sin x + 5 = 0$

Chia cả hai vế cho 5 ta có :

$\dfrac{3}{5}\cos x - \dfrac{4}{5}\sin x + 1 = 0$, đặt $\dfrac{3}{5} = \cos\varphi$, $-\dfrac{4}{5} = \sin\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = -1 = \cos\pi \Leftrightarrow x = \varphi \pm \pi + k2\pi$

với $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$.

274. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x.

- Tích $f'(x)\,\Delta x$ kí hiệu là $df(x)$ được gọi là *vi phân của hàm số* $y = f(x)$ tại điểm x ứng với Δx đã cho. Vậy

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

- *Chú ý* do $dx = \Delta x$, cho nên người ta còn viết vi phân của hàm số dưới dạng

$$df(x) = f'(x)dx \text{ hay } dy = y'dx$$

- Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}$$

275. Đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) của hàm số f(x) kí hiệu là $f^{(n)}_{(x)}$ (hay $y^{(n)}_{(x)}$) là đạo hàm của đạo hàm cấp (n − 1) của hàm số f(x), tức là

$$f^{(n)}_{(x)} = \left[f^{(n-1)}_{(x)}\right]'$$

276. $df(x) = f'(x)\Delta x$ mà $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$\Rightarrow df(x) = -2.0{,}001 \approx -0{,}002.$$

277. a) $y' = \dfrac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

Vậy $df(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}\Delta x$

b) $y' = \cos x - x\sin x \Rightarrow df(x) = (\cos x - x\sin x)\Delta x.$

c) $y' = 2\cos x(-\sin x) + 2x = -\sin 2x + 2x \Rightarrow df(x) = (-\sin 2x + 2x)\Delta x.$

d) $y' = 2\cot x.\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) \Rightarrow df(x) = \left(-\dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}\right)\Delta x$.

278. a) $y' = 5(3x+1)^4.3 = 15(3x+1)^4$

$y'' = 60(3x+1)^3.3 = 180(3x+1)^3$

$y^{(3)} = 540(3x+1)^2.3 = 1620(3x+1)^2.$

b) $y = \cos^3 x \Rightarrow y' = -3\cos^2 x\sin x.$

$y'' = -3[(\cos^2 x)'\sin x + (\sin x)'\cos^2 x]$

$y'' = -3[-2\cos x\sin^2 x + \cos^3 x] = 6\cos x - 9\cos^2 x$

$y^{(3)} = -6\sin x + 27\cos^2 x\sin x.$

c) $y = \sin 3x \Rightarrow y' = 3\cos 3x \Rightarrow y'' = -9\sin 3x \Rightarrow y^{(3)} = -27\cos 3x.$

279. a) $y' = -\dfrac{nax^{n-1}}{x^{2n}} = -\dfrac{na}{x^{2n-n+1}} = -\dfrac{na}{x^{n+1}}$

$$y'' = \frac{n(n+1)ax^n}{x^{2n+2}} = \frac{n(n+1)a}{x^{n+2}}.$$

b) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y'' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x.2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

$y'' = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

280. a) $(f.g)' = f'g + g'f$

$(f.g)'' = (f'g)' + (g'f)' = f''g + g'f' + g'f' + g''f$

$= f''g + 2f'g' + fg''$ (đpcm).

b) $(f.g)^{(3)} = (f''g + 2f'g' + fg'')' = (f''g)' + (2f'g')' + (fg'')'$

$= f^{(3)}g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg^{(3)}$

$= f^3g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}$ (đpcm).

281. $y = A\cos x + B\sin x$

$y' = -A\sin x + B\cos x$

$y'' = -A\cos x - B\sin x \Rightarrow y^{(3)} = A\sin x - B\cos x$

$y' + y^{(3)} = -A\sin x + B\cos x + A\sin x - B\cos x = 0.$

282. Ta có : $(y-c)^2 = ax + b \Rightarrow 2(y-c).y' = a$. Lấy đạo hàm tiếp

$2(y-c)'y' + 2(y-c)y'' = 0 \Rightarrow y'^2 + (y-c)y'' = 0$ (1)

Lấy đạo hàm tiếp ta có :

$2y'y'' + (y-c)'y'' + (y-c)y^{(3)} = 0 \Leftrightarrow 2y'y'' + y'y'' + (y-c)y^{(3)} = 0$

$\Leftrightarrow 3y'y'' + (y-c)y^{(3)} = 0 \Leftrightarrow 3y'y'' = (c-y)y^{(3)}$

$\Leftrightarrow 3y'' = \dfrac{(c-y)}{y'}y^{(3)} \Leftrightarrow 3y''^2 = \dfrac{c-y}{y'}.y''.y^{(3)}$

Ta phải chứng minh $\dfrac{c-y}{y'}.y'' = y'$. Điều này được khẳng định từ (1).

Do đó $3y''^2 = y'.y^{(3)}$ (đpcm).

283. $y^2 = \dfrac{1}{\cos 2x} \Rightarrow y^2\cos 2x = 1$ (1)

Lấy đạo hàm : $2yy'\cos 2x - 2y^2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = y^2\sin 2x$

$\Leftrightarrow y' = y^3\sin 2x.$ (2)

Lấy đạo hàm tiếp $y'' = 3y^2y'\sin 2x + 2y^3\cos 2x$(3). Thay (1) và (2) vào (3) ta có:

$y'' = 3y^5\sin^2 2x + 2y \Leftrightarrow y'' + y = 3y^5\sin^2 x + 3y$

$\Leftrightarrow y'' + y = 3y^5(1 - \cos^2 x) + 3y = 3y^5 - 3y^5\cos^2 x + 3y$

$= 3y^5 - 3y + 3y = 3y^5$ (đpcm).

284. $y' = n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$= \frac{n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{ny}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow y'\sqrt{x^2+1} = ny \ (1)$$

Lấy đạo hàm tiếp :

$$y''\sqrt{x^2+1} + y'\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = ny' \Leftrightarrow y''(x^2-1) + xy' = ny'\sqrt{x^2+1} \ (2)$$

Thay (1) vào vế phải của (2) được (đpcm).

285. Từ giả thiết ta có : $f(x) = \dfrac{v_{(x)}}{u_{(x)}} \Rightarrow f' = \dfrac{uv'-u'v}{u^2}$

$\Leftrightarrow u^2f' = uv' - u'v$. Cũng từ giả thiết $u = \dfrac{1}{\sqrt{f'}} \Leftrightarrow u^2f' = 1 \Rightarrow uv' - u'v = 1$. Lấy đạo hàm tiếp ta được :

$$u'v' + uv'' - u''v - u'v' = 0 \Leftrightarrow uv'' = u''v \Leftrightarrow \frac{u}{u''} = \frac{v}{v''}.$$

286. Ta có : $f(0) = 1$

Ta lại có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{x}{2}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0 \neq f(0)$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại $x = 0 \Rightarrow y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$

Với $x \neq 0$ $f'(x) = \dfrac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2}$

287. 1) Với $x \neq 0$ thì $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$

với $x = 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\dfrac{1}{x}$

$0 \leq \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\dfrac{1}{x} = 0$

Vậy $f'(0) = 0$.

2) Ta có $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Khi $x \to 0$ thì $x\sin\dfrac{1}{x} \to 0$ còn $\cos\dfrac{1}{x}$ không có giới hạn nên $f'(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Thật vậy, giả sử $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = a$ thì $\cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} = f'(x)$ cũng có giới hạn là a khi $x \to 0$ là vô lí.

Vậy f'(x) không liên tục tại x = 0.

288. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}+\Delta x\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\left(5\frac{\pi}{3}+5\Delta x\right)-\sin 5\frac{\pi}{3}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{5\Delta x}{2}}{5\frac{\Delta x}{2}}.5.\cos\left(5\frac{\pi}{3}+\frac{5\Delta x}{2}\right) = 5\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{5}{2}.$$

289. a) Khi x > 0 thì f(x) liên tục

Khi x < 0 thì f(x) liên tục.

Ta xét tính liên tục của hàm số f(x) tại x = 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{A\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{A\sin x}{x}.\lim_{x\to 0^+}\sin x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(4x+B) = B \text{ ; } f(0) = B.$$

Hàm số f(x) liên tục tại x = 0 khi B = 0, A bất kì.

Vậy muốn f(x) liên tục với mọi x thì B = 0, A bất kì.

b) Ta có $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax\sin 2x}{x} - \dfrac{A\sin^2 x}{x^2} & \text{khi } x > 0 \\ 4 & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2A\sin 2\Delta x}{2\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{A\sin^2\Delta x}{\Delta^2 x} = A$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{4\Delta x}{\Delta x} = 4.$ Vậy muốn y = f(x) có đạo hàm tại x = 0 thì

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow A = 4.$ Khi đó f'(x) liên tục với mọi x.

290. a) Từ $y = mx^3 - 3x$. Ta luôn có $x = 0 \Rightarrow y = 0\ \forall m$, nên (C_m) đi qua điểm O(0 ; 0) ∀m.

b) Điểm $O(0\,;0) \in (C_m)$ $y'_{(x)} = 3mx^2 - 3 \Rightarrow y'_{(0)} = -3$

Vậy tại điểm O(0 ; 0) của (C_m) có một tiếp tuyến $y = -3x$

291. 1) $A(x_0\,;\,y_0)$ là tiếp điểm của (C) ($y = f(x)$) và (C') ($y = g(x)$) thì $A \in (C)$ và $A \in (C')$ hay x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Tại $A(x_0\,;\,y_0)$ (C) và (C') đều có tiếp tuyến chung nghĩa là $k = k' \Rightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$ hay x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = g'(x)$. Vậy x_0 hoành độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

2) Áp dụng kết quả của 1), ta phải xét xem 2 có phải là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 3 = x^3 - 2x + 5 \\ 4x + 2 = 3x^2 - 2 \end{cases}$$

Rõ ràng 2 là nghiệm của hệ phương trình này và $x = 2 \Rightarrow y = 9$. Vậy điểm A(2; 9) là tiếp điểm của hai đường cong tương ứng với hai hàm trên.

292. a) $f'_{(x)} = -\dfrac{a}{(ax+b)^2}$, $f''_{(x)} = \dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}, \ldots, f^{(n)}_{(x)} = \dfrac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

b) $f'(x) = a\cos ax - b\sin b\,x = a\sin\left(ax + \dfrac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(bx + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x) = -a^2\sin ax - b^2\cos bx = a^2\sin\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) + b^2\cos\left(bx + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(3)}(x) = -a^3\cos ax + b^3\sin 6x = a^3\sin\left(ax + 3.\frac{\pi}{2}\right) + b^3\cos\left(bx + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy $f^{(n)}(x) = a^n\sin\left(ax + n\dfrac{\pi}{2}\right) + b^n\cos\left(bx + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

293. a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$. Áp dụng kết quả của 292.a) ta có :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left[\frac{4}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

b) Áp dụng kết quả của bài 292.b, $f(x) = \sin 5x$ thì $f^{(n)}(x) = 5^n\sin\left(5x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

294. $f(x) = \sin^2 5x = \dfrac{1 - \cos 10x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(10x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2}.10\cos\left(10x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}10\sin\left(10x - 2.\dfrac{\pi}{2}\right)$. Làm tiếp như bài 292.b) ta có $f^{(n)} = (-1)^n.\ \dfrac{1}{2}10^n\sin\left(10x - (x+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

Chú ý. Đối với những bài toán $f^{(n)}(x)$ của hàm số f(x) khi đã dự đoán công thức của $f^{(n)}(x)$, ta phải chứng minh công thức đó đúng với mọi n bằng quy nạp.

Chẳng hạn với f(x) = sin5x, ta đi đến $f^{(n)}(x)=5^n\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)$. Ta phải chứng minh công thức này đúng bằng quy nạp :

- Với n = 1, hiển nhiên đúng
- Giả sử công thức dự đoán đúng với n = k thì

$$f^{(k)}(x)=5^k\sin\left(5x+k\frac{\pi}{2}\right).$$

Ta phải chứng minh công thức dự đoán đúng với n = k + 1.

Thật vậy $f^{(k+1)}(x)=\left[f^{(k)}(x)\right]'=5^k.5.\cos\left(5x+\frac{k\pi}{2}\right)$

$$=5^{k+1}\sin\left(5x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Do đó $f^{(n)}(x)=5^n\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

295. Xét hàm số g(x) = f(x) + x − 1 xác định liên tục trên đoạn [0 ; 1] và có đạo hàm trong khoảng (0 ; 1) (theo giả thiết). Ngoài ra g(0) = −1, g(1) = 1, do đó tồn tại c ∈ (0 ; 1) sao cho g(c) = 0. Lại theo định lí Lagrăng tìm được a ∈ (0 ; c), b ∈ (c ; 1) sao cho

$$g'(a)=\frac{g(c)-g(0)}{c}=\frac{1}{c}$$

$$g'(b)=\frac{g(1)-g(c)}{1-c}=\frac{1}{1-c}$$

Mặt khác g'(a) = f'(a) + 1, g'(b) = f'(b) + 1 ⇒ f'(a) = g'(a) − 1

$$=\frac{1-c}{c},\ f'(b)=g'(b)-1=\frac{c}{1-c}$$

Vậy $f'(a).f'(b)=\frac{1-c}{c}.\frac{c}{1-c}=1.$

296. $y'=5\sin\left(\frac{3\pi}{2}-5x\right)$, đáp án E) đúng.

297. $f'(x)=\frac{(1+\sin x)(\cos x)'-(1+\sin x)'\cos x}{(1+\sin x)^2}=-\cos x-\sin x\cos x$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2x-\cos^2x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-(\sin x+1)}{(1+\sin x)^2}=\frac{-1}{1+\sin x}$$

Đáp án E) đúng.

298. $y = \dfrac{x-m}{x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{-m\}$

$$y' = \frac{x+m-(x-m)}{(x+m)^2} = \frac{2m}{(x+m)^2} > 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Đáp án A) đúng.

299. $V_{(t)} = S'_{(t)} = gt = 9{,}8t$

Khi $t = 5$ thì $V_{(5)} = 49$(m/s), đáp án B) đúng.

300. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{x+2}$ tại điểm $M_0(1\ ;\ 0)$ thuộc đồ thị là

$$y = f'(1)\,(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(6x-4)-(3x^2-4x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3x^2+12x-9}{(x+2)^2}$$

$f'(1) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$. Vậy phương trình tiếp tuyến là :

$y = \dfrac{2}{3}(x-1)$, đáp án B) đúng

301. *Phép biến hình* trong mặt phẳng là một quy tắc để với mỗi điểm M của mặt phẳng xác định được một điểm M' duy nhất của mặt phẳng gọi là ảnh của M trong phép biến hình đó. Kí hiệu là $f(M) = M'$. hay $f : M \to M'$.

302. *Phép dời hình* là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa 2 điểm bất kì. Nếu $f(M) = M'$, $f(N) = N'$ thì luôn có $M'N' = MN$.

303. a) *Phép tịnh tiến* theo véctơ $\vec{v}$ kí hiệu $T_{\vec{v}}$: $T_{\vec{v}}(M) = M'$ với $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

b) *Phép đối xứng qua đường thẳng* Δ kí hiệu $Đ_\Delta$: $Đ_\Delta(M) = M'$ nên Δ là trung trực của đoạn MM'

c) *Phép quay tâm I góc α* kí hiệu là $Q_{(I,\alpha)}$ với : $Q_{(I,\alpha)}(M) = M'$ sao cho $IM = IM'$ và $\widehat{MIM'} = \alpha$.

d) *Phép đối xứng tâm O* kí hiệu là $Đ_0$: $Đ_0(M) = M'$ sao cho $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. (hay MM' nhận O là trung điểm).

e) *Phép vị tự tâm I tỉ số k* kí hiệu là $V_{(I,k)}$: $V_{(i,k)}(M) = M'$ sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

g) *Phép đồng dạng* tỉ số k là một phép biến hình nếu $f(M) = M'$, $f(N) = N'$ thì $M'N' = |k|MN$.

304. Hai hình A và B gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tồn tại phép dời hình và trong đó $f(A) = B$ hoặc $f(B) = A$.

305. Hai hình A và B gọi là đồng dạng khi và chỉ khi tồn tại phép đồng dạng f để f(A) = B hoặc f(B) = A.

306. Hình A gọi là có tâm đối xứng và tâm đối xứng là I khi và chỉ khi $Đ_I(A) = A$.

307. Hình A gọi là có trục đối xứng và trục đối xứng là đường thẳng d khi và chỉ khi $Đ_d(A) = A$.

308. Tích của hai phép biến hình là một phép biến hình mới được xác định bởi việc thực hiện liên tiếp hai phép biến hình đã cho : $F = G_0E$ nghĩa là thực hiện E(M) = M' và G(M') = M'' thì F(M) = M''.

309. Phần tử (yếu tố) không đổi trong một phép biến hình là phần tử (yếu tố) biến thành chính nó. F(A) = A thì A là yếu tố không đổi (cố định, bất biến).

310. Phép đồng nhất là phép biến hình đặc biệt : mọi điểm đều là không đổi.

311. Phép dời hình biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng (không thay đổi thứ tự của chúng) và biến 3 điểm không thẳng hàng thành 3 điểm không thẳng hàng.

1) Suy ra : Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng.

biến tia thành tia.

biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đó.

biến góc thành góc bằng góc đó.

biến tam giác thành tam giác bằng nó.

biến đường tròn thành đường tròn bằng nó.

2) Tích 2 phép dời hình (với nghĩa thực hiện liên tiếp hai phép dời hình) ta được một phép dời hình.

3) Cho hai tam giác bằng nhau, có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Và phép biến hình đó là duy nhất.

312. 1) Phép đồng dạng biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự các điểm đó) và biến 3 điểm không thẳng hàng thành 3 điểm không thẳng hàng.

Phép đồng dạng tỉ số k > 0 biến đường thẳng thành đường thẳng.

biến tia thành tia.

biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân với k.

biến góc thành góc bằng nó.

biến tam giác thành tam giác đồng dạng (tỉ số đồng dạng là k).

2) Mọi phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) đều là tích (còn gọi là hợp thành) của phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình.

313. a) Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$:

+ Không có điểm nào đứng yên ($(\vec{v} \neq \vec{0})$

+ Các đường thẳng // $\vec{v}$ sẽ biến thành chính nó.

b) Phép đối xứng trục $Đ_d$:

+ Mỗi điểm $\in$ d (trục đối xứng) đều không đổi.

+ Trục d là đường thẳng không đổi.

+ Các đường thẳng $\perp$ d đều biến thành chính nó.

+ Các hình có trục đối xứng là d đều biến thành chính nó.

c) Phép quay tâm I góc α : ($\alpha \neq 0$; $\alpha \neq \pi$) duy nhất tâm I là điểm không đổi

d) Phép đối xứng tâm I : Điểm I là điểm không đổi.

+ Các đường thẳng qua I biến thành chính nó.

+ Các hình có tâm đối xứng là I đều biến thành chính nó.

e) Phép vị tự tâm I tỉ số k.

+ Tâm I là điểm không đổi.

+ Các đường thẳng qua I đều biến thành chính nó.

314. 1) Tích của 2 hoặc nhiều phép dời hình là 1 phép dời hình.

2) Tích của 2 hoặc nhiều phép tịnh tiến là 1 phép tịnh tiến.

3) Tích của 2 phép đối xứng trục d_1 và d_2 mà $d_1 // d_2$ là 1 phép tịnh tiến.

4) Tích của 3 phép đối xứng trục d_1, d_2, d_3 mà $d_1 // d_2 // d_3$ là phép đối xứng trục.

5) Tích của 2 phép đối xứng trục d_1 và d_2 mà $d_1 \cap d_2$ tại I là phép quay Q(I)

6) Tích của 3 phép đối xứng trục d_1, d_2, d_3 mà d_1, d_2, d_3 đồng quy tại I là phép đối xứng trục.

7) Tích của phép vị tự và phép dời hình là phép đồng dạng.

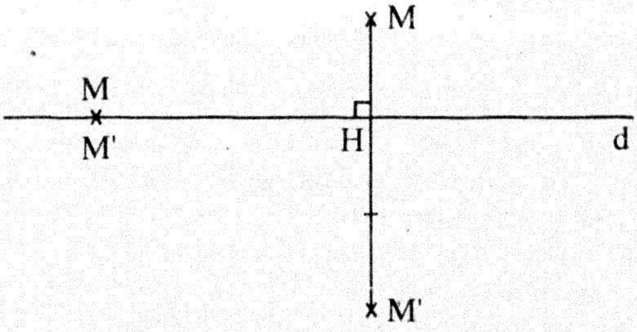
315. Xem hình vẽ 16

$M \in d \to f(M) = M$.

$M \notin d \to f(M) = M'$ mà $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MH}$.

Mỗi M có duy nhất M' = f(M). Vậy f là phép biến hình.

Có thể tổng quát hoá f(M) = M' với $\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MH}$, (MM' $\perp$ d) đều là phép biến hình với $k \neq 0$



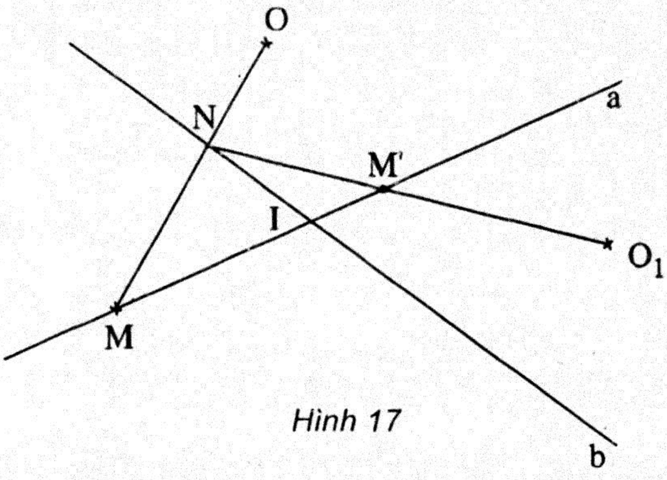
Hình 16

316. Quy tắc này gồm 2 bước

Bước 1: OM cắt b tại N.

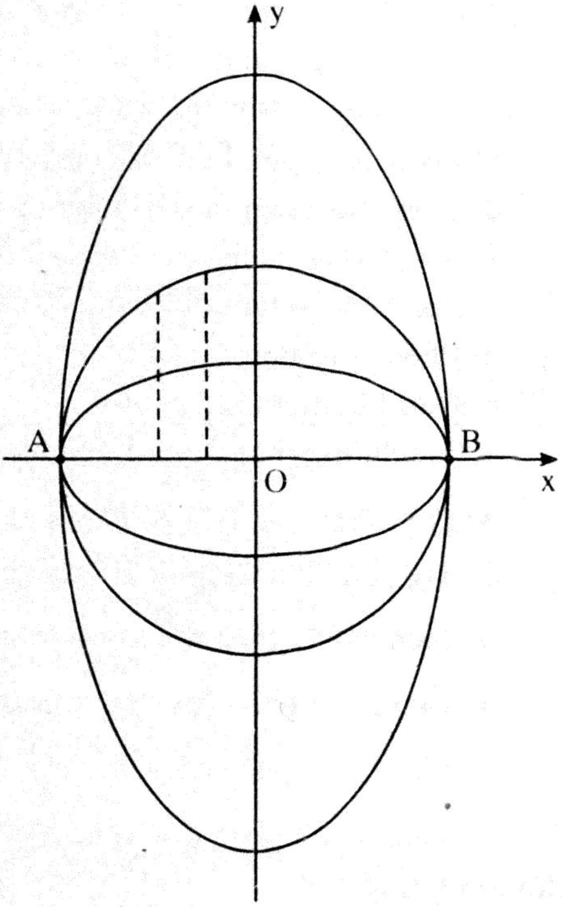
Bước 2: O_1N cắt a tại M'

Nếu OM // b thì không có N do đó không có M'.



Hình 17

Nếu ON // a thì cũng không có M'. Vậy có 2 vị trí điểm M sẽ không có M'. Quy tắc M → M' như trên không là 1 phép biến hình.



Hình 18

317. HS tự làm

318. M(x, y) ∈ đường tròn ⇔ $x^2 + y^2 = R$

Ảnh M'(x) của M sẽ có toạ độ M'(x, ky) ≡ M(x' ; y')

Do đó y' = ky → $y = \frac{y'}{k}$. Thay vào ta có :

$$\text{Từ } x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow (x')^2 + \left(\frac{y'}{k}\right)^2$$

$$= R^2 \rightarrow \frac{(x')^2}{R^2} + \frac{(y')^2}{(kR)^2} = 1.$$

Vậy điểm M ∈ Elíp có 2 bán trục là R và kR.

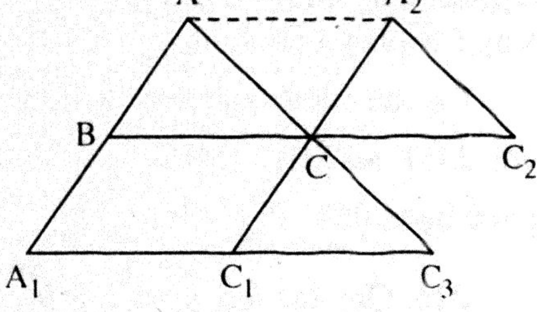
$k = \frac{1}{2}$ Elip có trục lớn là 2R (nằm ngang theo Ox)

k = 2 Elip có trục lớn là 4R (nằm dọc theo Oy).

319. $T_{\overrightarrow{AB}}(\Delta ABC) = \Delta BA_1C_1$

$T_{\overrightarrow{BC}}(\Delta ABC) = \Delta A_2CC_2$

$T_{\overrightarrow{AC}}(\Delta ABC) = \Delta CC_1C_3$.



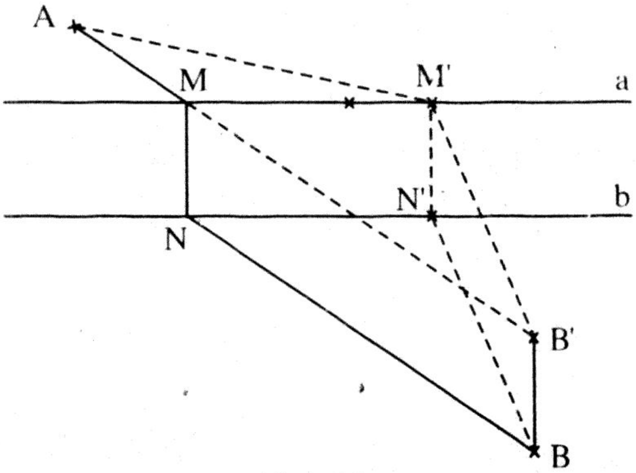
Hình 19

320. Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = \vec{0}$; $T_{\vec{O}}$ (ΔABC) = ΔABC.

321. Bài toán này có thể phát biểu lại như sau

Có 2 làng A và B ở 2 bên bờ sông (hai bờ //). Tìm địa điểm xây cầu MN (MN ⊥ 2 bờ sông) sao cho đường đi từ A đến B (có qua cầu) là ngắn nhất.

Tịnh tiến bờ sông b sang bờ sông a (theo $\overrightarrow{MN}$). Khi đó B → B' nên $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{MN}$. Khi đó sông biến mất, đường đi từ b' tới A ngắn nhất (là đoạn B'A). Đường này cắt bờ sông a ở đâu thì đó là mố cầu ở bờ sông a. Tịnh tiến trở lại ta có cây cầu MN. Ta có (AM + MN + NB) ngắn nhất.



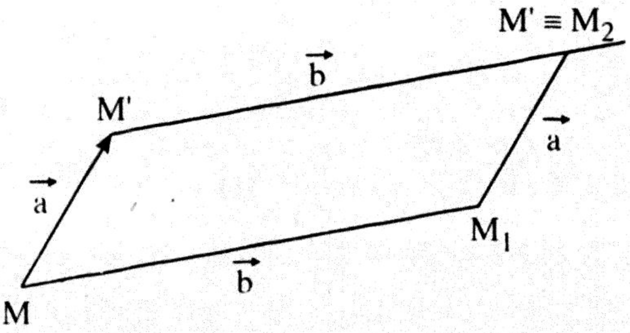
Hình 20

Lấy M' bất kì trên bờ sông a (M' ≠ M) khi đó đường đi AM' + M'N' + N'B = AM' + M'N' + M'B'. So sánh với AM + MN + NB = AM + MN + MB' = AB' + MN

Vậy AM' + M'N' + M'B' > AB' + MN

vì AM' + M'B' > AB' ⇒ Bắc cầu ở vị trí MN là tối ưu.

322. Ta có



Hình 21

$T_{\vec{a}}(M) = M' \Rightarrow MM' = \vec{a}$

$T_{\vec{b}}(M') = M'' \Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{b}$

Vậy

$T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}}(M) = M'' \Rightarrow \overrightarrow{MM''} = \vec{a} + \vec{b}.$

hay là $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$.

Ta lại có $T_{\vec{b}}(M) = M_1 \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = \vec{b}$; $T_{\vec{a}}(M_1) = M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{b}$

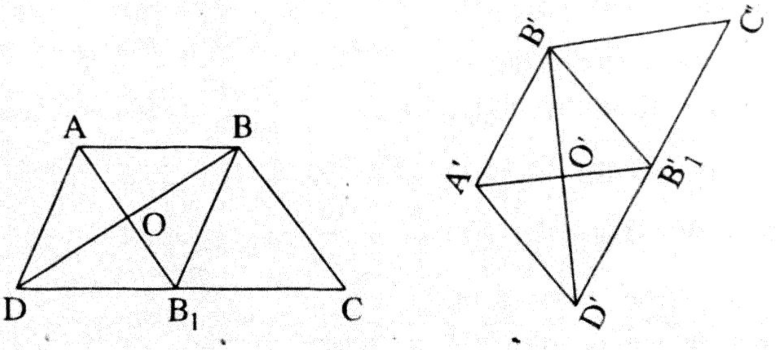
Vậy $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}}(M) = M_2 \Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{b} + \vec{a}$.

hay là $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}+\vec{a}}$. Do $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ nên $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM_2} \leftrightarrow M'' \equiv M_2$

Vậy $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}}$. Kết luận : Tích (hay hợp thành) của 2 phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{a} + \vec{b}$.

323. Cho ABCD và A'B'C'D' là 2 hình thang có AB và A'B' là có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau (AB, A'B' là 2 đáy nhỏ)

Từ B vẽ BB_1 // AD. Từ B' vẽ $B'B'_1$ // A'D'.



a) b)

Hình 22

Gọi O là tâm hình bình hành ABB_1D.

Gọi O' là tâm hình bình hành $A'B'B'_1D'$

Ta sẽ dễ dàng thấy $\Delta BB_1C = \Delta B'B'_1C'$ (c,c,c). Do đó có một phép dời hình F biến ΔBB_1C thành $\Delta B'B'_1C'$. Trong đó đường thẳng DC → D'C' và đoạn DB_1 → $D'B'_1$, do đó D → D'. Vậy DB → D'B' suy ra O → O'. Từ đó $AOB_1 \to A'O'B'_1$. Và A → A'. Trong phép dời hình F thì ABCD → A'B'C'D'. Vậy theo định nghĩa thì tồn tại phép dời hình $F(\Delta BB_1C) = \Delta B'B'_1C'$.

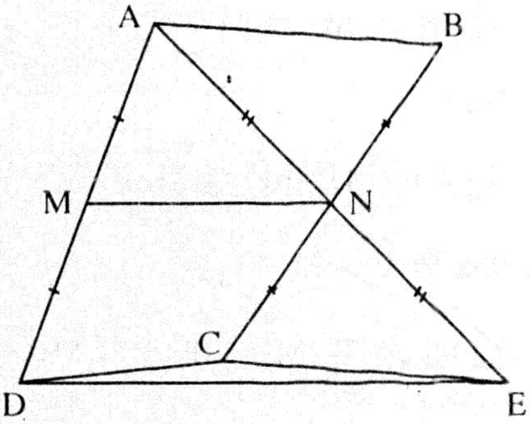
F(ABCD) = A'B'C'D' do đó ABCD = A'B'C'D'.

324. M là trọng điểm AD

N là trọng điểm BC.

Thực hiện phép tịnh tiến theo véctơ $2\overrightarrow{MN}$. Ta có $T_{2\overrightarrow{MN}}(D) = E \Rightarrow$

$\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{MN}$. ⇒ DE $\overset{//}{=}$ 2MN. Vậy N là trọng điểm AE. ⇒ ΔANB = ΔENC (cgc) ⇒ AB = CE. Theo giả thiết DC + AB = 2MN = DE. ⇒ DC + CE = DE. Vậy C ∈ DE ⇒ DC // AB.



Hình 23

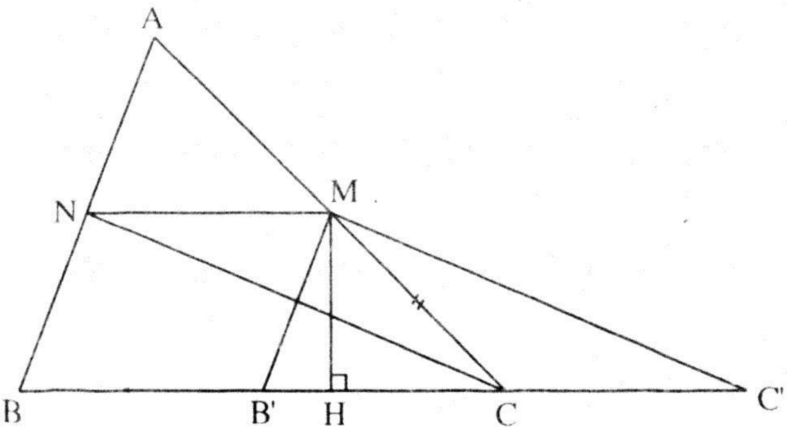
Vậy ABCD là hình thang (đáy là AB và CD). Nếu thêm điều kiện AB = CD thì ABCD trở thành hình bình hành.

325. Giả thiết AC > AB phải chứng minh BM < CN. Thực hiện $T_{\overrightarrow{NM}}$ thì B → B' ; C → C'.

CN → C'M.

BN → B'M.

Bài toán trở thành chứng minh BM < C'M. (Hình 24)



Hình 24

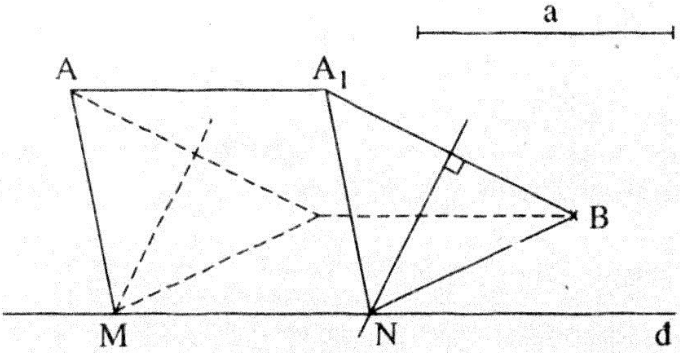
Từ M hạ MH ⊥ BC.

Do AC > AB → $\frac{1}{2}AC > \frac{1}{2}AB$ → MC > MB' → HC > HB' (đường xiên lớn hơn thì hình chiếu lớn hơn). Ta lại có BB' = NM = CC' ⇒ CC' + HC > BB' + B'H.

⇒ HC' > BH.

⇒ MC' > MB (đpcm)

⇒ CN > MB.



Hình 25

326. Hướng dẫn

a) Vẽ AA_1 // d và $AA_1 = a$.

Vẽ trung trực của A_1B cắt d ở N.

Vẽ AM // A_1N.

Ta có $MN = AA_1 = a$.

$AM = A_1N = BN$.

Cũng có thể vẽ BB_1 // d và $BB_1 = a$

Vẽ trung trực của AB_1 cắt d ở M.

Vẽ BN // A_1M. Dễ dàng thấy kết quả 2 cách này trùng nhau.

b) Để MN = a và AM + MN + NB ngắn nhất ⇔ (MN + NB) ngắn nhất.

Khi đó ta dựng như hướng dẫn sau.

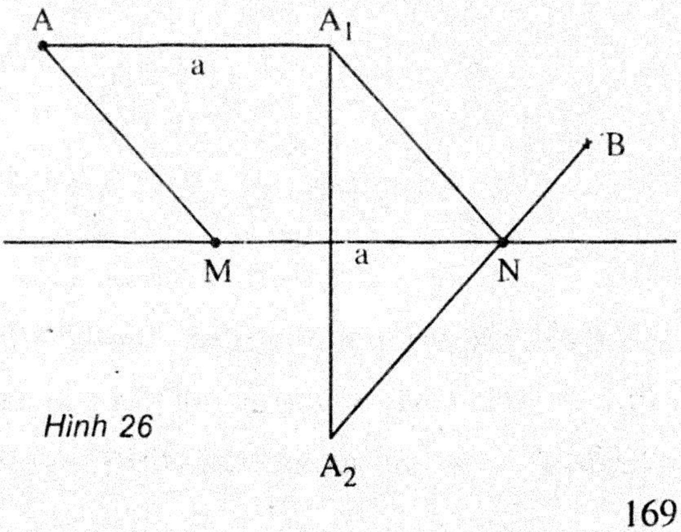
Vẽ AA_1 // d và $AA_1 = a$.

Lấy A_2 đối xứng của A_1 qua d.

A_2B cắt d ở N.

Vẽ AM // A_1N.

(AM + MN + NB) ngắn nhất.



Hình 26

327. Thực hiện phép quay Q(A, 60^o)

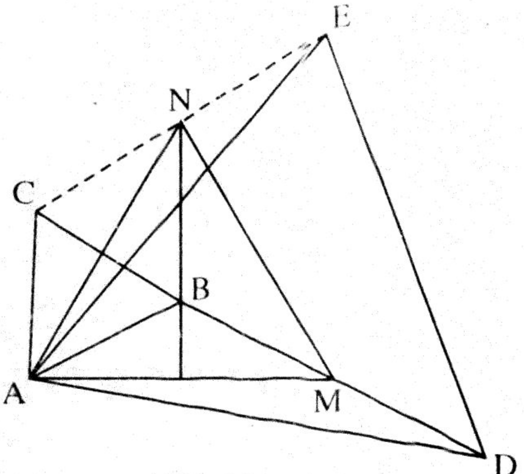
Khi đó B → C

D → E.

BD → CE

M → N. (h. 27)

Vậy AM = AN và $\widehat{MAN} = 60^o \Rightarrow$ ΔMAN là Δ đều. Bài toán này phải thừa nhận quy ước A đến B đến C theo chiều ngược chiều kim đồng hồ thì chiều từ A đến B đến E cũng đúng như vậy.



Hình 27

Thực hiện phép quay tâm A góc quay 60^o theo chiều quay kim đồng hồ

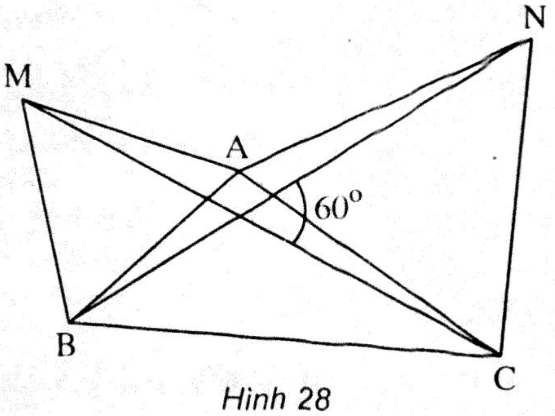
Trong phép quay đó B → M

N → C

BN → MC

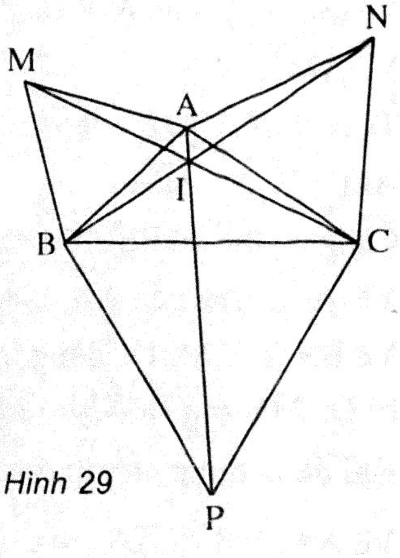
Vậy BN = MC

và $(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{MC}) = 60^o$.



Hình 28

328. Xem hình 29. Nếu vẽ thêm ΔBPC đều phía ngoài ΔABC. Ta chứng minh BN = CM = AP và 3 đường này đồng quy tại I, tạo thành 6 góc 60^o. Theo chứng minh trên. Xét phép Q(A ; 60^o) ; BN → MC. Gọi I là giao của BN và MC. Trên CM lấy E sao cho BI = EI ⇒ ΔBEI đều.



Hình 29

Xét phép quay Q(B ; 60^o) : M → A

C → P.

E → I.

Vậy API thẳng hàng và AP = CM = BN; $\widehat{BIM} = \widehat{MIA} = \widehat{AIN} = \widehat{NIC} = \widehat{CIP} = \widehat{PIB} = 60^o$

329. Theo chứng minh bài 328 thì MBIA là tứ giác nội tiếp vì $\widehat{BMA} = 60^o$, $\widehat{BIA} = 120^o$. Vậy I thuộc đường tròng ngoại tiếp ΔMAB ⇔ đường tròn (MBIA) có tâm M_0. Tương tự đường tròn (BICP) có tâm P_0, đường tròn (NAIC) có tâm N_0.

Với 2 đường tròn cắt nhau. Đường nội tâm sẽ vuông góc với dây cung chung. Vậy $M_0P_0 \perp BI$. $M_0N_0 \perp AI$, $N_0P_0 \perp CI$ tại các trung điểm của BI, AI và CI là B_0, A_0, C_0. Khi đó xét các tứ giác $A_0IB_0M_0$ có $\hat{B}_0 = \widehat{A}_0 = 90^o$, $\widehat{B_0IA_0} = 120^o \to \widehat{B_0M_0A_0} = 60^o$.

Vậy xét tương tự ta có $\Delta M_0N_0P_0$ có 3 góc $60^o \Rightarrow \Delta M_0N_0P_0$ đều.

330. Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Xét phép quay tâm O góc quay 180^o $Q(0\ ;\ 180^o)$

Trong phép quay này AB → CD, M → M'.

AD → CB, Q → Q'.

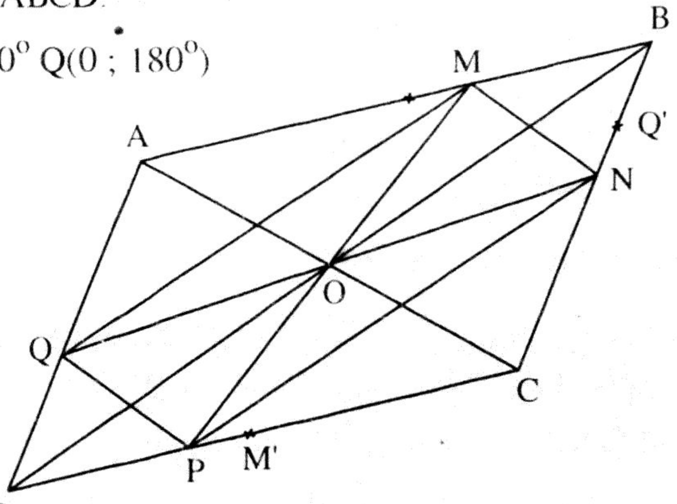
Theo tính chất phép quay MQ → M'Q'.

nên MQ = M'Q'

và $(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{M'Q'}) = 180^o$

do đó $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{Q'M'}$

suy ra $\overrightarrow{MQ'} = \overrightarrow{QM'}$.



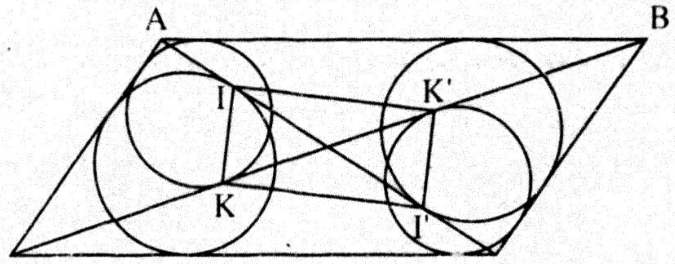
Hình 30

Giả thiết cho MNPQ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ suy ra $\overrightarrow{NQ'} = \overrightarrow{PM'}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $\overrightarrow{NQ'} = \vec{O}$ và $\overrightarrow{PM'} = \vec{O}$ nghĩa là Q' ≡ N và M' ≡ P nghĩa là MP và QN cũng đi qua O. Vậy MNPQ cũng có tâm là O.

331. ΔABC và ΔADC có 2 đường tròn nội tiếp tiếp xúc với AC tại I và I', ΔABD và ΔCBD có đường tròn nội tiếp, tiếp xúc với BD ở K và K'.

Thực hiện phép quy tâm O góc quay 180^o thì ΔABC → ΔCDA do đó I' → I. Tương tự ΔABD → ΔCDB nên K → K'.

Do đó O là trung điểm của II' và KK'. Vậy điểm IKI'K' là hình bình hành.

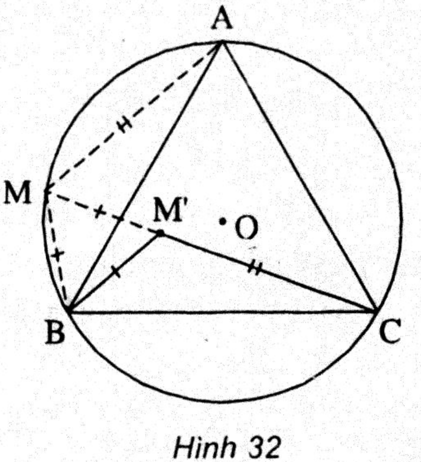


Hình 31

332. Thực hiện phép quay tâm B, góc quay 60^o. Khi đó A → C và M → M'.

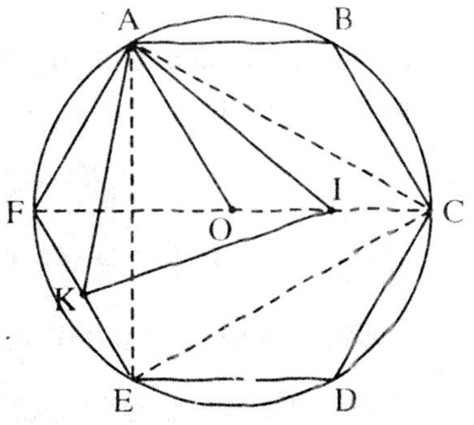
ΔBMA → ΔBM'C.

Vì góc $\widehat{BMA} = 120^o$ (bù với $\hat{C}$) nên $\widehat{BM'C} = 120^o$ BM' = BM, $\widehat{MBM} = 60^o \Rightarrow$ $\widehat{CM'M} = 180^o \to M' \in MC$.



Hình 32

Do $AM \to CM'$ nên $MA = M'C$ và $MB = MM'$. Vậy $MC = MA + MB$ (đpcm)



Hình 33

333. Cho lục giác đều ABCDEF với tâm O. Gọi I là trung điểm OC, K là trung điểm EF. Ta có nhận xét ΔAFO đều, ΔAFC đều. Xét phép quay tâm A, góc quay 60^o : $Q(A, 60^o)$. Khi đó

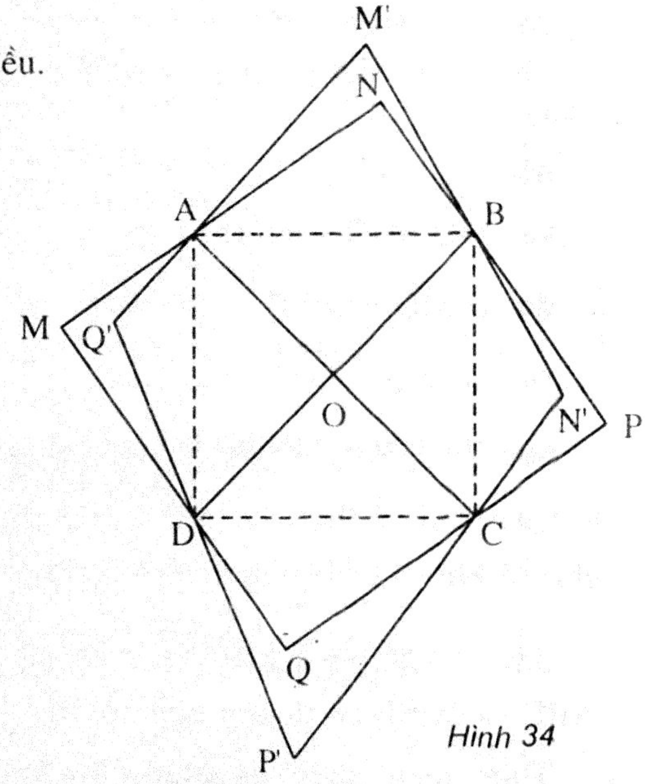
$$\left.\begin{array}{l} F \to O \\ E \to C \\ FE \to OC \end{array}\right\} \text{ suy ra } K \to I.$$

Vậy $AK = AI$, $\widehat{KAI} = 60^o \to \Delta AIK$ đều.

334. ABCD nội tiếp trong hình bình hành MNPQ thì hình vuông ABCD và MNPQ có cùng tâm là O.

Thực hiện phép quay tâm O, góc quay 90^o thì $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to A$. Giả sử $A \in MN$, $B \in NP$, $C \in PQ$, $D \in QM$.

Thực hiện phép quay $Q(0\ ;\ 90^o)$ $MNPQ \to M'N'P'Q'$. Và $B = M'N' \cap MP$, $N'P' \cap PQ = C$, $P'Q' \cap QM = D$. $Q'M' \cap MN = A$. Bài toán chỉ có nghiệm hình khi $M'N' \cap NP$.



Hình 34

335. Xét phép quay $Q(0\ ;\ 90^o)$

Khi đó ta có : $A \to$, $B \to C$

$C \to D$, $D \to A$.

$AB \to BC$, $BC \to CD$.

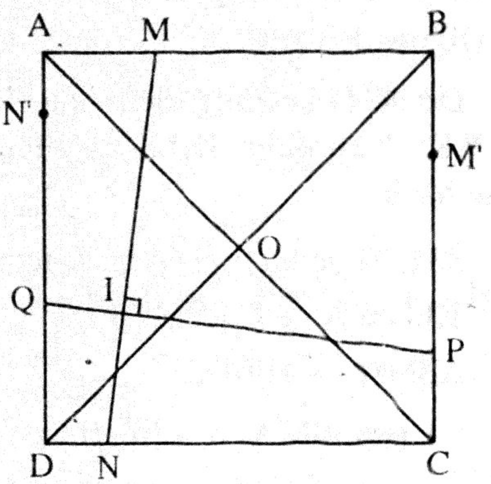
$CD \to DA$, $DA \to AB$

$M \in AB \to M' \in BC$

$N \in DC \to N' \in DA$

$\Rightarrow MN \perp M'N' \Rightarrow M'N' \parallel PQ$.

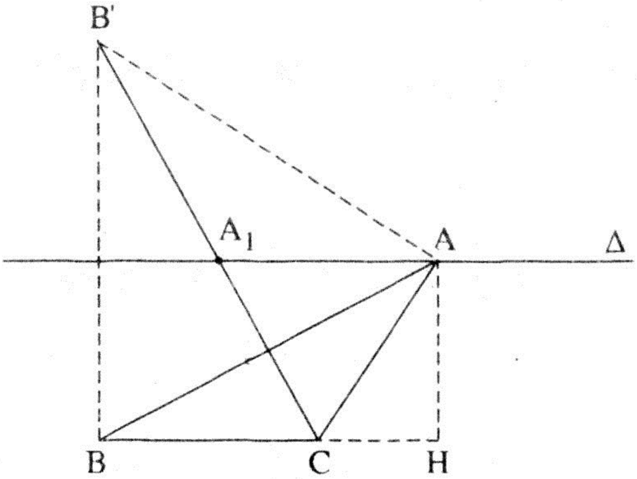
Và $M'P \parallel N'Q$ vì $BC \parallel AQ$. Do đó $M'PQN'$ là hình bình hành. Vậy $PQ = M'N'$ và vì $MN \to M'N'$ nên $MN = M'N'$. Vậy $MN = PQ$. đpcm.



Hình 35

336. Xét ΔABC có diện tích S và cạnh đáy $BC = a \rightarrow AH = \frac{2S}{a} = h$ (chiều cao). Vì AH không đổi suy ra A chạy trên Δ // BC. Xét phép đối xứng qua Δ : $Đ_{\Delta}(B) = B'$. $D_{\Delta}(A) = A$.

Do đó $BA \rightarrow B'A$ nên $BA + AC = B'A + AC > B'C$. Vậy $BA + AC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $BA + AC = B'C$. Khi đó $A \equiv A_1$ là trung điểm của B'C suy ra $A_1B = A_1C$. Vậy chu vi ΔABC có BC không đổi, diện tích S không đổi, đạt giá trị nhỏ nhất khi ΔABC là Δ cân đáy là BC.



Hình 36

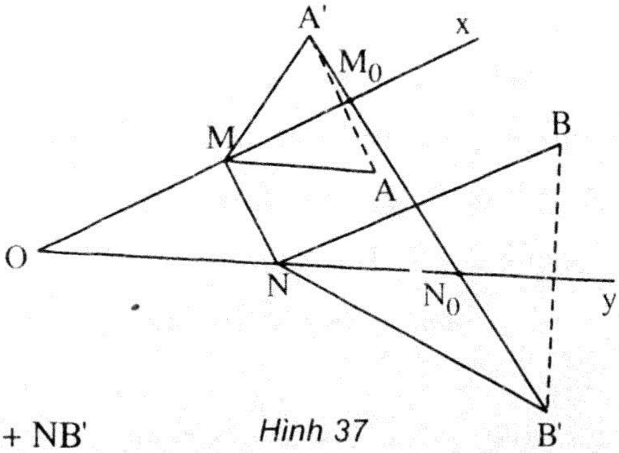
337. Lấy $M \in Ox$, $N \in Oy$. Xét phép đối xứng trục Ox : $A \rightarrow A'$

$MA \rightarrow MA'$

Xét phép đối xứng trục Oy : $B \rightarrow B'$

$NB \rightarrow NB'$

Do đó $AM + MN + NB = A'M + MN + NB'$



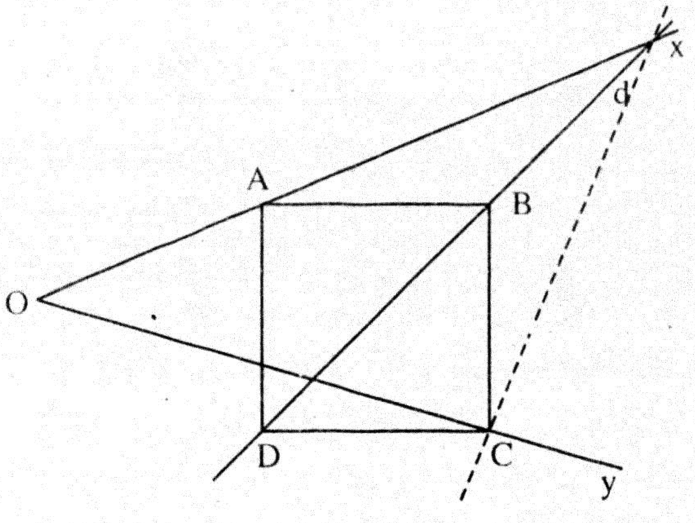
Hình 37

Đường gấp khúc $A'M + MN + NB'$ với A', B' cố định có độ dài ngắn nhất. Khi A', M, N, B' thẳng hàng. Vậy $M \equiv M_0 = A'B' \cap Ox$, $N \equiv N_0 = A'B' \cap Oy$.

M_0 và N_0 là 2 điểm phải tìm.

338. Dùng phép đối xứng trục qua đường thẳng (d) $Đ_d(A) = C$; $Ox \rightarrow \Delta$

$\Delta \cap Cy = C$. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với d, cắt Ox ở A, cắt d ở I. Vẽ đường tròn tâm I bán kính IA, đường tròn cắt d ở 2 điểm B và D. ABCD là hình phải dựng.



Hình 38

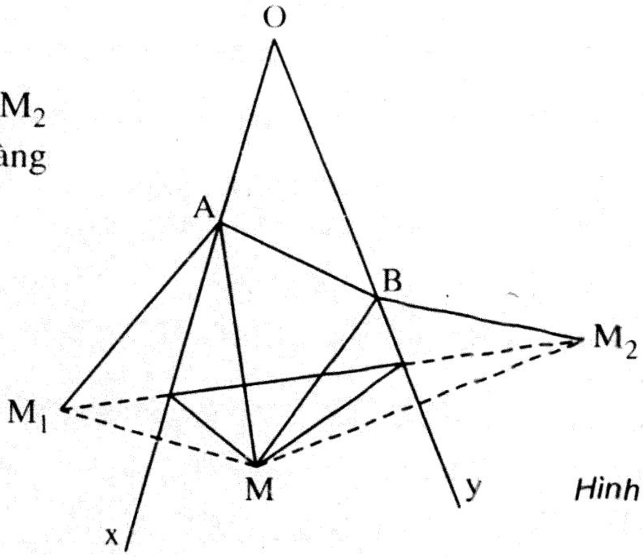
339. Tương tự bài tập số 328

Phép $Đ_{Ox}(M) = M_1$:

$AM \rightarrow AM_1$

$D_{Oy}(M) = M_2 : BM \rightarrow BM_2$

Chu vi $\Delta MAB = M_1A + AB + BM_2$ ngắn nhất khi và chỉ khi A, B thẳng hàng với M_1, M_2

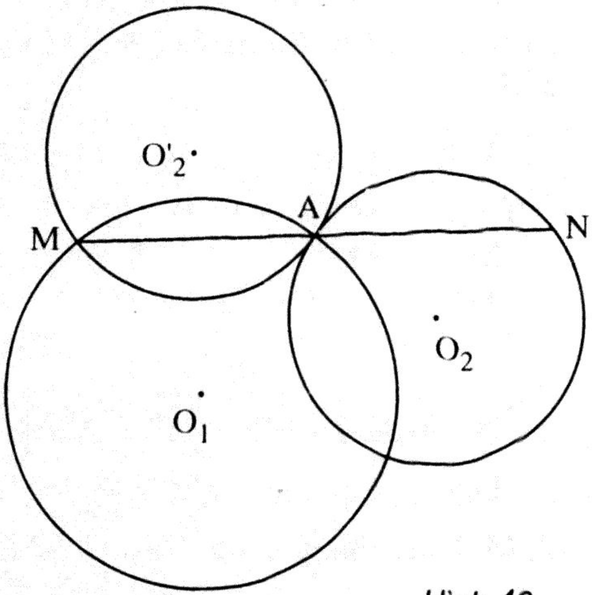


Hình 39

340. Xét phép đối xứng tâm A. Đường tròn $(O_2) \rightarrow (O_2)'$ cắt (O_1) ở M. Đường thẳng MA cắt (O_2) tại N.

Cát tuyến MAN là hình phải dựng.

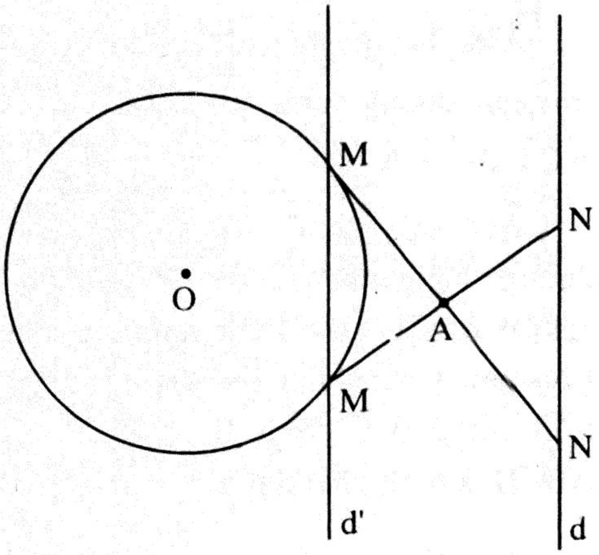
Bạn đọc chứng minh phần còn lại.



Hình 40

341. Xét phép đối xứng tâm A : $Đ_A$. Qua phép đối xứng này (d) → (d'). (d') cắt (O) tại M. Nối MA cắt (d) tại N. MAN là đường thẳng phải dựng.

Bài toán có nghiệm nếu (d') cắt (O).



Hình 41

342. Gọi O là trung điểm AB. Xét phép đối xứng tâm O : $Đ_o(A) = B$.

$Đ_o(Ix) = I'x'$.

$I'x' \cap Iy = C$, $CO \cap Ix = D \Rightarrow$ ACBD là hình bình hành phải dựng.

343. Cách dựng. Lấy α bất kì, dựng α_1 đối xứng của α qua M_1

dựng α_2 đối xứng của α_1 qua M_2

dựng α_3 đối xứng của α_2 qua M_3

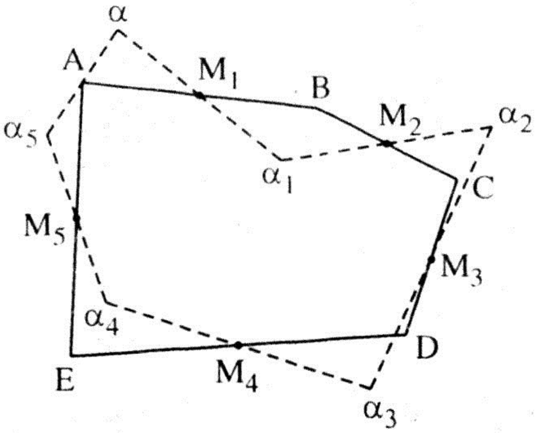
dựng α_4 đối xứng của α_3 qua M_4

dựng α_5 đối xứng của α_4 qua M_5.

Khi đó trung điểm đoạn $\alpha\alpha_5$ là A, B là đối xứng của A qua M_1.

C là đối xứng của B qua M_2

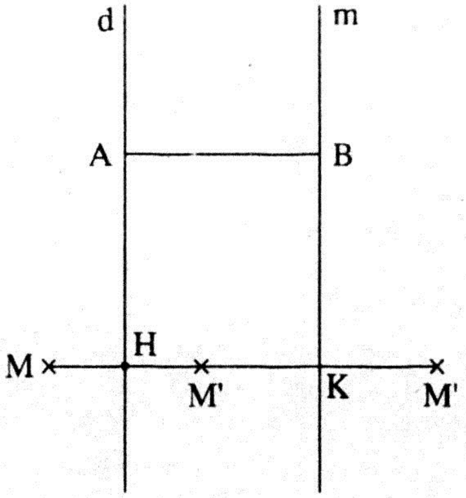
D là đối xứng của C qua M_3



Hình 42

Bạn hãy chứng minh ABCDE là ngũ giác thoả mãn điều kiện đầu bài.

344. Cho d // m. Lấy A ∈ d, B ∈ m. Sao cho AB ⊥ d và m, AB cố định. Lấy M bất kì. Qua $\text{Đ}_d(M) = M'$ thì $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ (H là trung điểm MM'). Khi đó $\text{Đ}_m(M') = M''$ thì $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'K}$ (K là trung điểm M'M"). Khi đó M, M', M" thẳng hàng ⇒ $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{M'K})$ $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'K} + \overrightarrow{KM'} = 2(\overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'K})$



Suy ra $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}$.

Hình 43

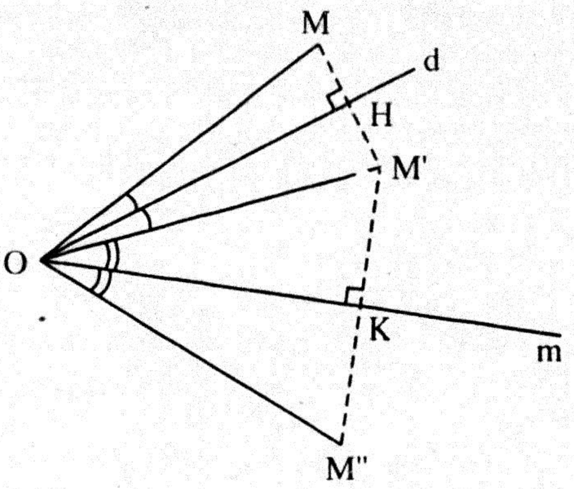
Điều đó chứng tỏ tích 2 phép đối xứng trục song song là phép tịnh tiến theo véctơ có phương vuông góc với d và m, độ lớn bằng 2 lần khoảng cách giữa d và m.

345. Nếu d cắt m tại O

$\text{Đ}_d(M) = M' \Rightarrow \widehat{MOH} = \widehat{HOM'}$, OM = OM'

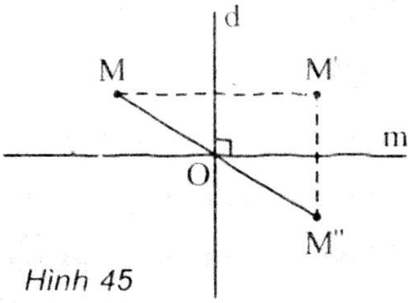
$\text{Đ}_m(M') = M'' \Rightarrow$ $\widehat{M'OK} = \widehat{KOM''}$ OM' = OM"

Khi đó ta có OM = OM" và $\widehat{MOM''} = 2\widehat{HOK}$. Vậy $\text{Đ}_m \circ D_d$ tích của 2 phép đối xứng trục cắt nhau là phép quay tâm là giao điểm của 2 trục d và m. Góc quay có độ lớn gấp đôi góc của 2 trục d và m.



Hình 44

$Đ_d \circ Đ_m = Q(O\ ;\ 2\alpha)$ (d và m cắt nhau nhưng không vuông góc).



Hình 45

346. Nếu $d \perp m$ thì $\alpha = 90^o \Rightarrow 2\alpha = 180^o$. Góc quay 180^o thì phép quay là phép đối xứng tâm. Vậy $Đ_d \circ Đ_m = Đ_o$ $(d \perp m)$.

347. Tích của 2 phép tịnh tiến $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$. Đã chứng minh ở bài tập phần tịnh tiến.

348. Xét tích $Q_1(O_1, 2\alpha)$ và $Q_2(O_2\ ;\ 2\beta)$

Theo bài tập 345 $Q_1(O_1\ ;\ 2\alpha) = Đ_{\Delta_1} \circ Đ_{\Delta_2}$ với Δ_1 cắt Δ_2 tại O_1 và góc giữa chúng là α.

$Q_2(O_2\ ;\ 2\beta) = Đ_{\Delta_3} \circ Đ_{\Delta_4}$ với Δ_3 cắt Δ_4 tại O_2 và góc giữa chúng là β.

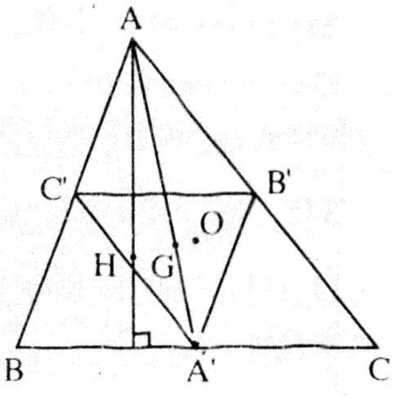
Ta lựa chọn $\Delta_2 \equiv \Delta_3$ chính là đường thẳng đi qua O_1O_2. Do đó $Đ_{\Delta_2} \circ Đ_{\Delta_3}$ = phép đồng nhất. Vậy $Q_1 \circ Q_2 = Đ_{\Delta_1} \circ Đ_{\Delta_2} \circ Đ_{\Delta_3} \circ Đ_{\Delta_4} = Đ_{\Delta_1} \circ Đ_{\Delta_4}$.

Nếu $\Delta_1 // \Delta_4$ thì theo bài tập 346 : Q_1Q_2 là phép tịnh tiến

Δ_1 cắt Δ_4 thì theo bài tập 345: Q_1Q_2 là phép quay.

349. Cho ΔABC có trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Xét phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$: $V_{\left(G;-\frac{1}{2}\right)}$. Trong phép vị tự này

$$\left.\begin{array}{l} A \to A' \\ B \to B' \\ C \to C' \\ H \to H' \\ O \to O' \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} H, G, H' \text{ thẳng hàng} \\ O, G, O' \text{ thẳng hàng} \end{array}$$

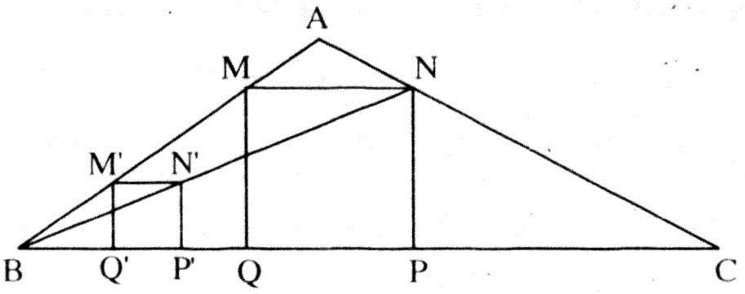


Hình 46

* Vì các đường trung trực của ΔABC chính là các đường cao của $\Delta A'B'C'$ nên $H' \equiv O$. Vậy ta có H, G, O thẳng hàng và HG = 2GO (OH = 3OG).

350. Vì O' là tâm đường tròn A'B'C' cũng chính là tâm đường tròn 9 điểm – đường tròn Ơle do đó ta có $O' \in OGH$. Vậy đường thẳng Ơle luôn chứa điểm O' là tâm đường tròn Ơle.

351. *Cách dựng 1.*



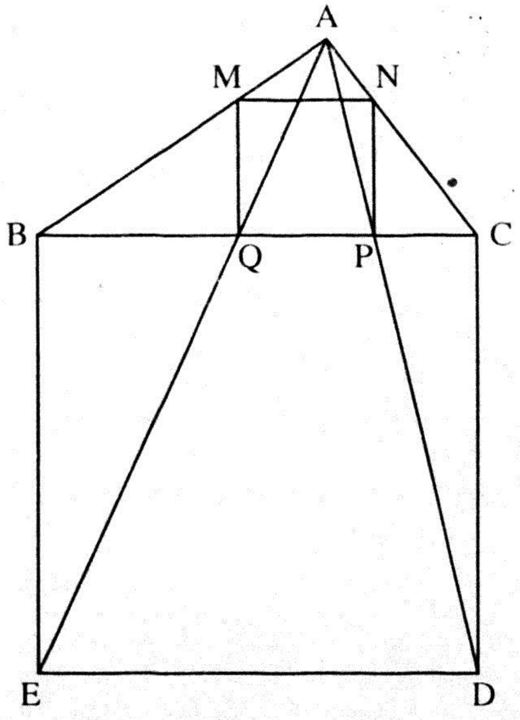
Hình 47

Dựng hình vuông bất kì có 2 đỉnh ∈ BC 1 đỉnh thuộc AB. Kẻ BN' cắt AC ở N. Dùng phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{BN}{BN'}$ ta sẽ có hình vuông MNPQ phải dựng.

Cách dựng 2.

Tương tự cách 1 nhưng M' ∈ CA, P', Q' ∈ BC.

Cách dựng 3



Hình 48

Dựng hình vuông BCDE. Nối AD và AE

Dựng phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \frac{AP}{AD} = \frac{AQ}{AE}$. Khi đó D → P, E → Q, C → N, B → M.

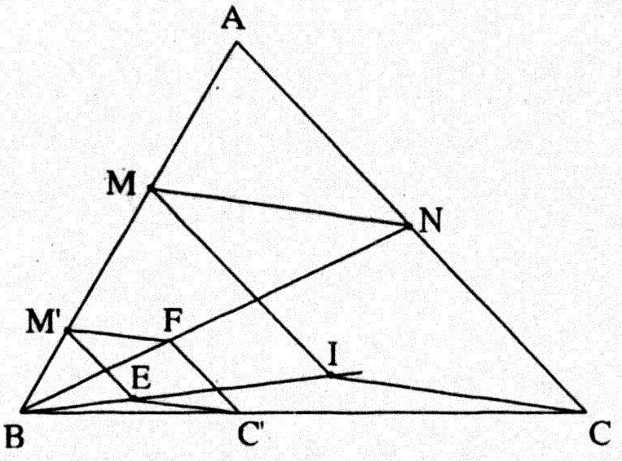
Ta có MNPQ là hình vuông phải dựng.

352. *Cách dựng*

– Lấy M' ∈ AB kẻ M'x // AC. Trên M'x lấy E sao cho M'B = M'E

– Lấy E làm tâm vẽ đường tròn bán kính EM' cắt BC ở C'

– Dùng phép vị tự tâm B tỉ số $K = \frac{BC}{BC'}$.



Hình 49

Khi đó C' → C

E → I

F → N

Ta sẽ chứng minh BM = MN = NC, với MNCI là hình thoi, BMI là Δ cân đỉnh M. Hình thoi M'FC'E $\backsim$ hình thoi MNCI theo tỉ số K.

353. Cho ΔABC, $P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$.

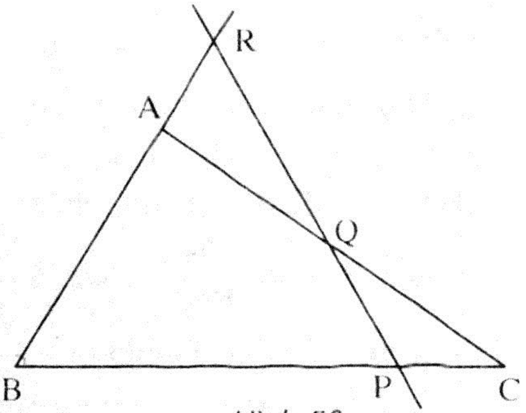
a) Giả sử P, Q, R thẳng hàng, ta có

$B \to C$ bởi phép vị tự tâm P tỉ số

$$k_1 = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

$C \to A$ bởi phép vị tự tâm Q tỉ số

$$k_2 = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$$


Hình 50

Vậy B biến thành A trong phép biến hình F là tích của 2 phép $V_1(P, k_1)$ và $V_2(Q, k_2)$; $F = V_2 \circ V_1 = V$.

Tỉ số vị tự của phép vị tự tích là $k_1k_2 = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \neq 1$.

Vì nếu $k_1k_2 = 1 \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ dẫn đến PQ // AB trái giả thiết PQ cắt AB tại R. Tâm vị tự nằm trên PQ và thẳng hàng với A, B vì biến B thành A. Vậy tâm đó là R

$\Rightarrow F = V(R, k_3)$ với $k_3 = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$. Do đó $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

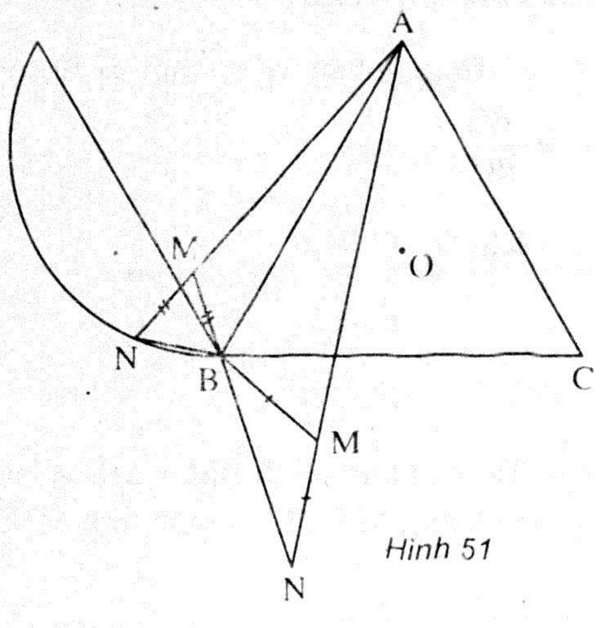
$P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$ mà P, Q, R thẳng hàng $\Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

b) Ngược lại nếu có $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ ta chứng minh P, Q, R thẳng hàng. Giả sử PQ không chứa R mà PQ cắt AB ở R' thì theo chứng minh trên ta có $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} \Leftrightarrow R' \equiv R$. Vậy P, Q, R phải thẳng hàng là đpcm.

354. a) $M \in \overset{\frown}{AB} \to \Delta MBN$ đều. Do đó M biến thành N bởi $Q(B ; 60^o)$. Khi M chạy trên $\overset{\frown}{AB}$ thì tập hợp N là ảnh của cung $\overset{\frown}{BA}$ qua phép $Q(B, 60^o)$.

b) $M \in \overset{\frown}{BC}$ thì ΔBMN cân đỉnh M, góc ở đáy 30^o do đó phép biến hình biến $M \to N$ là phép đồng dạng theo tỉ số $k = \sqrt{3}$ góc quay 30^o (theo chiều kim đồng hồ).

c) $M \in \overset{\frown}{AC}$ chứng minh tương tự (xem


Hình 51

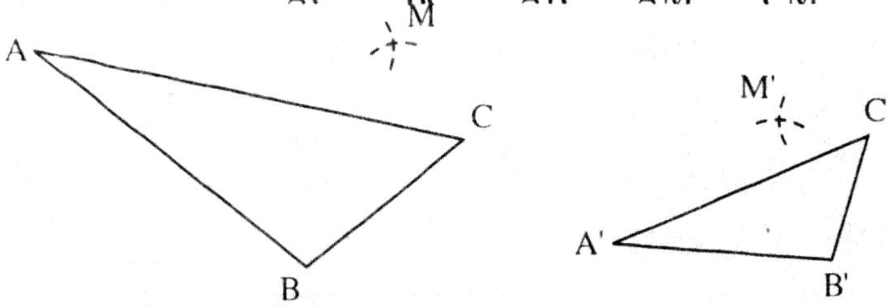
355. Ta đã biết A'B'C'D'E' là ảnh của đa giác ABCDE trong phép đồng dạng tâm S tỉ số k thì ta có các góc tương ứng bằng nhau, các cạnh tương ứng tỉ lệ và ngược lại. Do đó cho hai hình chữ nhật có hai cạnh kề tỉ lệ ⇒ các cạnh tương ứng tỉ lệ và các góc tương ứng bằng nhau (đều là 90^o). Vậy hai hình chữ nhật đó là đồng dạng.

356. Hai hình thoi có góc nhọn bằng nhau ⇒ 4 cặp góc tương ứng bằng nhau và hiển nhiên các cạnh tương ứng là tỉ lệ ⇒ Hai hình thoi đó là đồng dạng.

357. Cho phép biến hình F(ABC) = A'B'C'. A → A' ; B → B' ; C → C'.

Cho M dựng ảnh M'

Ta biết được tỉ số $k = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'M'}{AM} = \frac{C'M'}{CM}$.

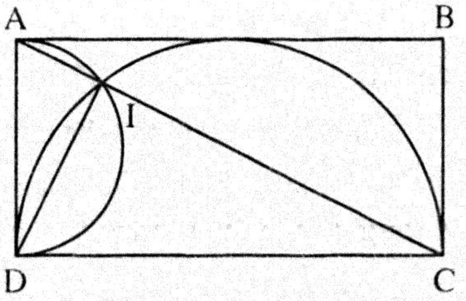


Hình 52

Từ đó ta tính được A'M' = kAM, C'M' = kCM.

Vậy từ A' vì đường tròn bán kính A'M'. Vẽ đường tròn tâm C' bán kính C'M' ta sẽ thu được M' = F(M).

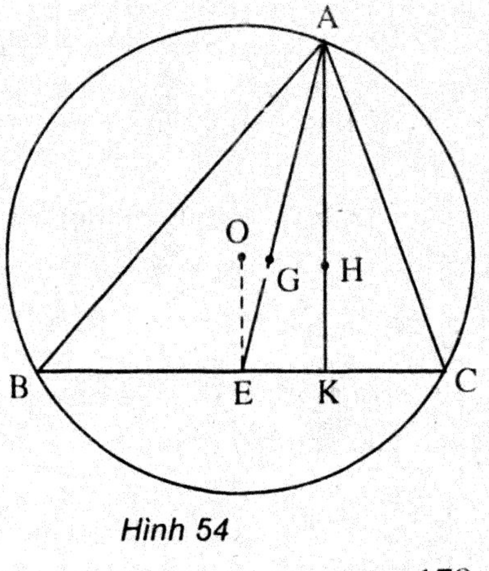
358. Cho hình chữ nhật ABCD, AB = 2AD. Tìm phép đồng dạng biến AD → DC, như vậy A → D và D → C. Hướng dẫn. Vẽ 2 đường tròn đường kính AD và DC. Hai nửa đường tròn phía trong hình cắt nhau tại I. Ta có DI ⊥ IC và DI ⊥ IA → I là hình chiếu của D trên AC. Phép đồng dạng tâm I, góc quay 90^o và tỉ số đồng dạng k = 2 biến ΔIAD → ΔIDC biến AD → DC.



Hình 53

359. * BC cố định ⇒ OE cố định và AH = 2OE. Vậy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OE}$ không đổi nên quỹ tích H là ảnh cung lớn $\overset{\frown}{BAC}$ trong phép $T_{2\overrightarrow{OE}}$.

* HCA'B là hình bình hành (AOA' là đường kính) do đó E là trung điểm A'H. Khi A chạy trên $\overset{\frown}{BC}$ lớn thì A' chạy trên cung $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ. Vậy quỹ tích H là ảnh của cung $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ qua phép đối xứng tâm E là trung điểm BC.



Hình 54

* BHCH' là tứ giác mà HH' luôn nhận BC là trung trực vậy quỹ tích H coi là ảnh của phép đối xứng trục BC của cung $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ.

* Vì EG = $\frac{1}{3}$EA nên quỹ tích G là ảnh của cung $\overset{\frown}{BAC}$ trong phép $V\left(E,\frac{1}{3}\right)$

360. Gọi K là trung điểm AB

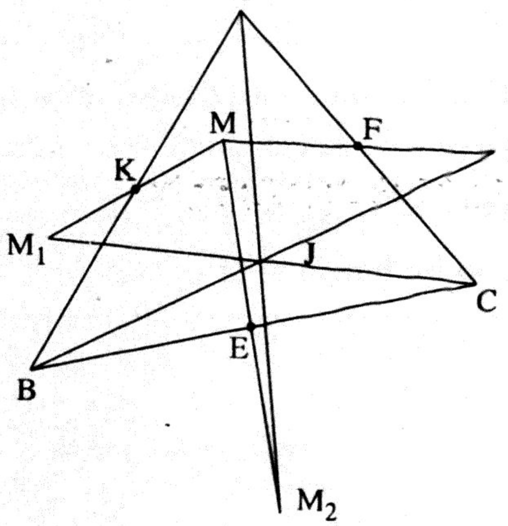
E là trung điểm BC Gọi G là trung tâm ΔABC

F là trung điểm CA

Phép $V_1\left(G,-\frac{1}{2}\right)$: ΔABC → ΔEFK

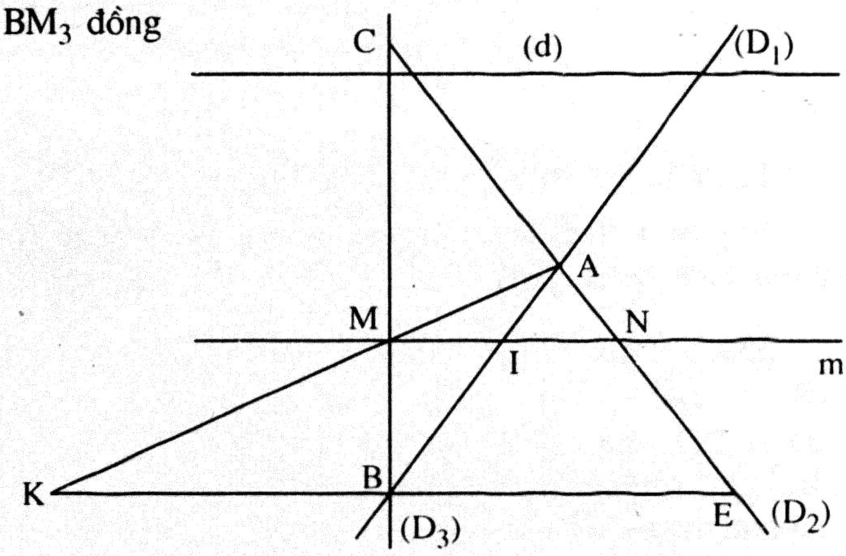
Phép $V_2(M,2)$: ΔEFK → $\Delta M_2M_3M_1$.

Vậy ΔABC → $\Delta M_2M_3M_4$ bởi $V_2 \circ V_1$. Suy ra CM_1, AM_2, BM_3 đồng quy tại tâm J



Hình 55

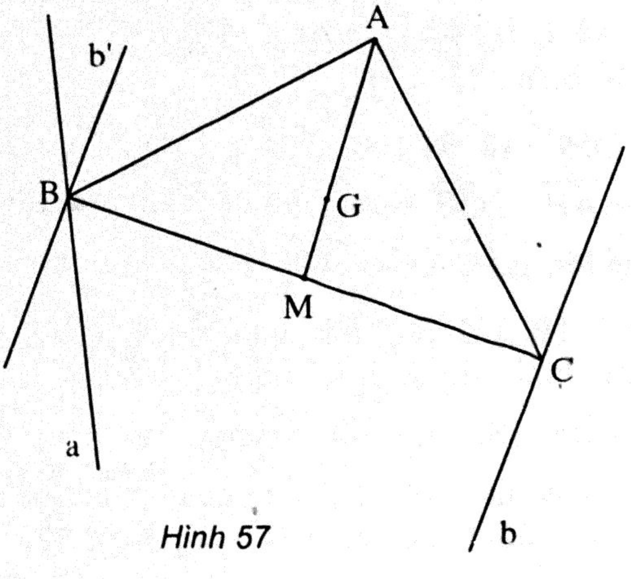
361. Gọi $D_1 \cap D_2$ = A, $D_1 \cap D_3$ = B, $D_2 \cap D_3$ = C. Qua B vẽ đường thẳng // d cắt AC ở E lấy K sao cho B là trung điểm KE, AK cắt D_3 ở M. Qua M vẽ đường thẳng //d. Đó là đường thẳng phải dựng vì m // d và MI = IN, I ∈ D_1.



Hình 56

362. Dùng phép vị tự tâm A, tỉ số k = $\frac{3}{2}$ biến G → M.

- Dùng phép đối xứng tâm M biến b → b'
- b' cắt a ở B
- BM cắt b ở C. ΔABC thoả mãn yêu cầu bài toán.

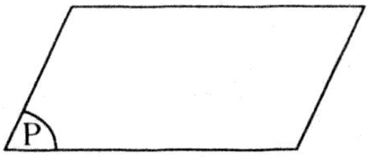


Hình 57

363. HS tự làm.

364. Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng... cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

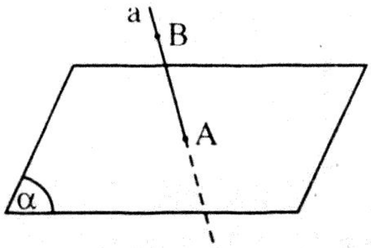
Người ta thường biểu diễn mặt phẳng bằng hình bình hành và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn bằng các chữ in hoa P, Q, R hay chữ Hi Lạp thường α, β, γ và đặt trong ngoặc (h.58)



Hình 58

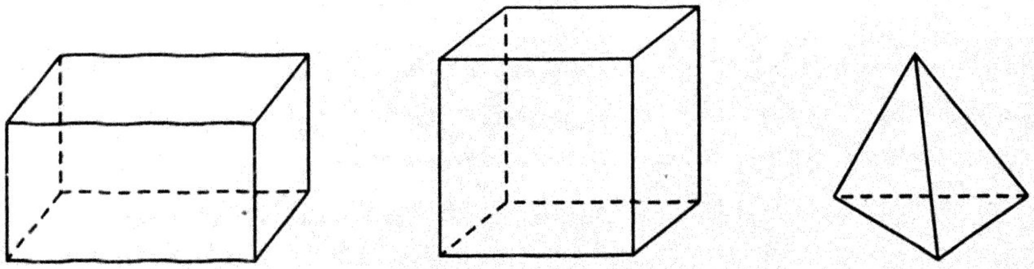
365. Điểm A thuộc mặt phẳng α thì ta nói A nằm trên α hay α chứa A hay α đi qua A và kí hiệu $A \in \alpha$.

Điểm B không thuộc mặt phẳng α thì kí hiệu $B \notin \alpha$ (h.59)



Hình 59

366. Người ta vẽ các hình không gian lên bảng hoặc lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là hình biểu diễn.



Hình hộp chữ nhật

Hình lập phương

Hình tứ diện

Hình 60

367. Để vẽ hình biểu diễn một hình trong không gian ta dựa vào những quy tắc sau :

- Hình biểu diễn đường thẳng, đoạn thẳng là đường thẳng, đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn hai đường thẳng song song hoặc cắt nhau là hai đường thẳng song song hoặc cắt nhau.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng. Chẳng hạn hình biểu diễn điểm B thuộc đường thẳng b là điểm B' thuộc đường thẳng b'.
- Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy được và nét đứt đoạn để biểu diễn cho đường không nhìn thấy được.

Các quy tắc khác sẽ được nhắc đến ở phần sau.

368. Có 5 tính chất được thừa nhận

- Tính chất 1. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Tính chất 2. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Tính chất 3. Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- Tính chất 4. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó..
- Tính chất 5. Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

369. Có ba cách xác định mặt phẳng

- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

370. Muốn xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt ta phải tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng đó.

371. Muốn xác định giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng ta thường phải qua trình tự sau :

1) Xét xem đường thẳng đã cho thuộc mặt phẳng nào.

2) Tìm giao tuyến của mặt phẳng vừa tìm được và mặt phẳng đã cho.

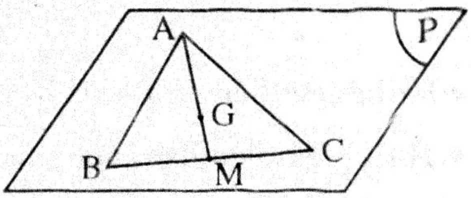
3) Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng chính là giao điểm của đường thẳng và giao tuyến vừa tìm được.

372. Câu c đúng, câu a, b chưa đúng.

373. Câu a sai, câu b và c đúng.

374. P chứa 3 điểm A, B, C, vậy BC $\subset$ P. Gọi M là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow$ M $\in$ P (tính chất 2).

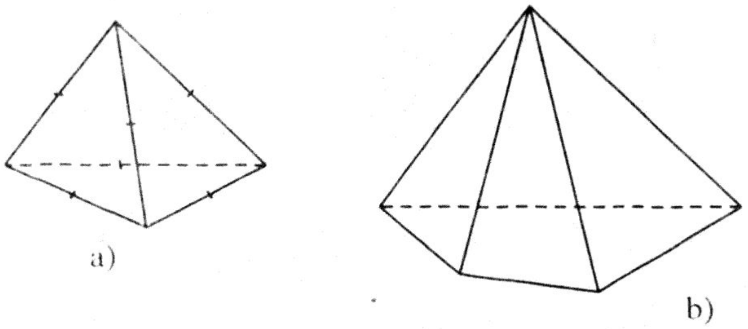
A, M thuộc P $\Rightarrow$ AM $\subset$ P. Vậy trọng tâm G của ΔABC thì G $\in$ AM $\Rightarrow$ G $\in$ P (tính chất 2)



Hình 61

375. a) Ta đã biết hình tứ diện là hình có 4 mặt đều là tam giác. Nếu 4 mặt này đều là tam giác đều thì hình tứ diện đó gọi là hình tứ diện đều (Hình 62a).

b) Hình chóp là hình gồm một miền đa giác và các miền tam giác có chung một đỉnh (Hình 62b).

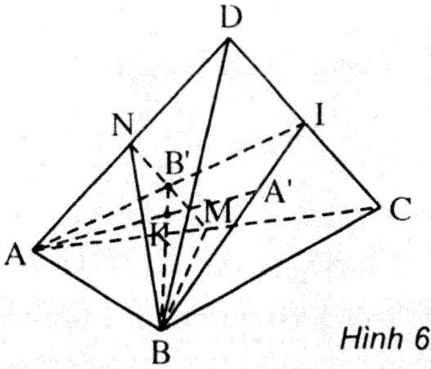


a)

b)

Hình 62

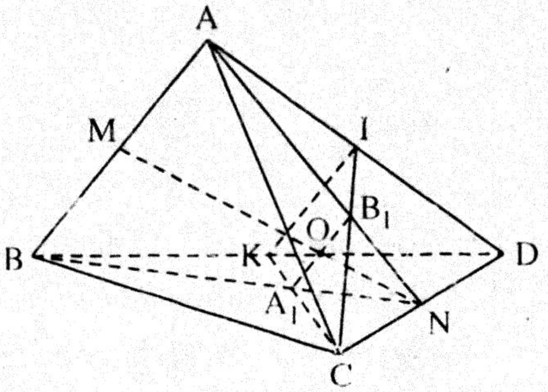
376. Khi mặt phẳng (α) cắt hình chóp (tức là cắt các mặt bên hoặc mặt đáy), theo các đoạn thẳng (ta gọi là đoạn giao tuyến của mặt phẳng (α) và các mặt đó) tạo thành một miền đa giác phẳng gọi là thiết diện của mặt phẳng (α) cắt hình chóp.



Hình 63

377. a) MN là đường trung bình của ΔACD nên MN // CD, AI là trung tuyến của ΔACD. AI và MN cùng thuộc mp ACD nên chúng cắt nhau tại điểm B'. Mp ABI và mp BMN có chung nhau hai điểm B và B' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến BB'.

b) BI là một đường trung tuyến của ΔBCD, mà A' là trọng tâm ΔBCD nên A' ∈ BI và A'I = $\frac{1}{3}$BI.AA' ⊂ mp ABI, mặt phẳng này cắt mp BMN theo giao tuyến BB'.AA' và BB' cũng thuộc mp ABI, chúng là các đường thẳng nối đỉnh với một điểm thuộc cạnh đối diện của ΔABI nên chúng cắt nhau tại K, nó là giao điểm của AA' với mp BMN.



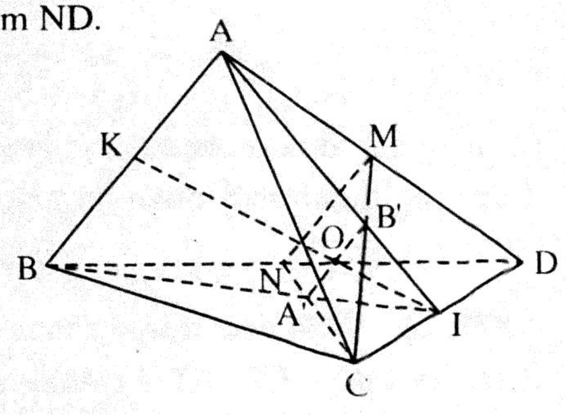
Hình 64

378. AN và CI là các đường trung tuyến của ΔACD nên chúng cắt nhau tại trọng tâm B_1. BN và CK là các đường trung tuyến của ΔBCD nên chúng cắt nhau tại trọng tâm A_1. Mp ABN chứa MN và mp CIK có chung nhau hai điểm A_1, B_1 nên chúng cắt nhau theo giao tuyến A_1B_1. MN và A_1B_1 cùng thuộc mp ABN, MN nối đỉnh với một điểm thuộc cạnh đối diện của ΔABN, còn A_1B_1 nối hai điểm thuộc hai cạnh còn lại của tam giác này nên chúng cắt nhau tại O, nó là giao điểm của MN với mp CIK.

Vì A_1 là trọng tâm ΔBCD nên $\frac{A_1N}{BN}=\frac{1}{3}$, B_1 là trọng tâm ΔACD nên $\frac{B_1N}{AN}=\frac{1}{3}$. Suy ra, A_1B_1 // AB. Theo định lí Talet : $\frac{NO}{NM}=\frac{NB_1}{NA}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{NO}{MO}=\frac{1}{2}$.

379. Mp ABI cắt mp CMN theo giao tuyến A'B'. KI cắt A'B' tại O, là giao điểm của KI với mp CMN.

Trong ΔBCD, kẻ II'//CN thì I' là trung điểm ND.



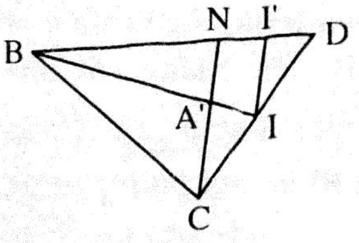
Hình 65

Vì $ND=\frac{1}{2}BN$ (gt) $\Rightarrow I'N=\frac{1}{4}BN$,

nên $\frac{IA'}{A'B}=\frac{I'N}{NB}=\frac{1}{4}$

Trong ΔABI, kẻ AF // A'B',

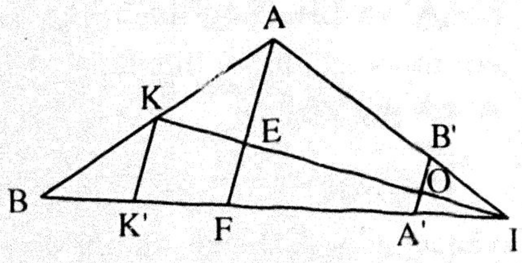
ta có $\frac{IO}{OE}=\frac{IB'}{B'A}=\frac{1}{2}$ (1)



Hình 66

Kẻ KK' // AF thì K' là trung điểm BF vì K là trung điểm AB $\Rightarrow$ EO = 2KE.

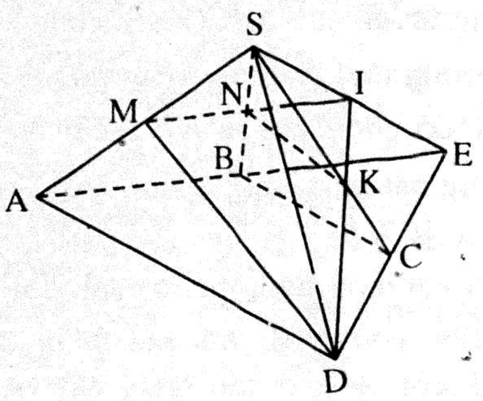
Kết hợp với (1) cho $\frac{IO}{OK}=\frac{1}{3}$.



Hình 67

380. Hai cạnh bên của hình thang AB và CD cắt nhau tại E. Mp SAB và mp SCD có chung nhau hai điểm S và E nên cắt nhau theo giao tuyến SE.

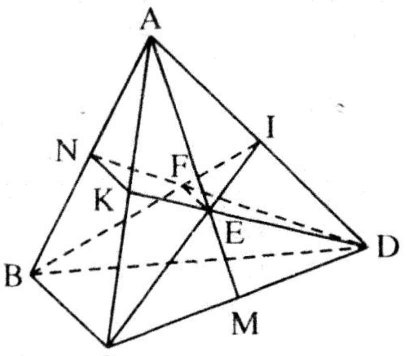
MN $\subset$ mp SAB nên cắt SE tại I. I $\in$ SE mà SE $\subset$ mp SCD nên DI cắt SC tại K (SC $\subset$ mp SCD). K là giao điểm của SC với mp DMN.



MN là đường trung bình của ΔSAB nên I là trung điểm SE. Theo đầu bài : AD = 2BC nên BC là đường trung bình $\Delta AED \Rightarrow$ C là trung điểm DE.

ΔSDE có SC và DI là các đường trung tuyến nên K là trọng tâm $\Delta SDE \Rightarrow SK = 2KC$ $\Leftrightarrow \frac{SK}{KC}=2$.

381. Vì EF // BC nên mp BCEF cắt AD tại I. Kẻ NK // BC thì K là trung điểm của AC. Vì NK và EF cùng song song BC nên EF // NK. Mp BCI và mp DNK có chung nhau điểm F nên cắt nhau theo giao tuyến FE vì FE và KN cùng thuộc mp ⇒ K, E, D thẳng hàng. Vậy E là trọng tâm ΔACD, F là trọng tâm ΔABD. Suy ra : $\frac{EF}{BC} = \frac{IE}{IC} = \frac{1}{3}$.



Hình 69

382. a) A'C ⊂ mp AA'C'C. Mặt phẳng này cắt mp AB'D' và mp BC'D theo giao tuyến AO' và OC'. A'C cắt các giao tuyến này tại I và K, chúng là giao điểm của A'C với mp AB'D' và mp BC'D.

b) Xét tứ giác AOC'O', có AO // O'C' nên nó là hình bình hành ⇒ AO' // = C'O.

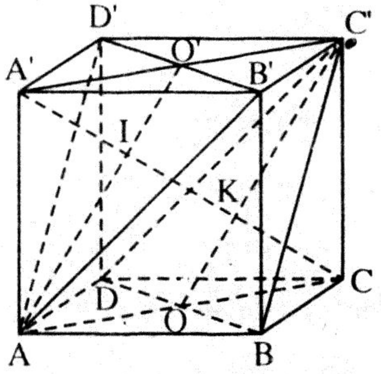
Xét ΔCAI có O là trung điểm AC và OK // AI (cmt) ⇒ K là trung điểm IC :

IK = KC. (1)

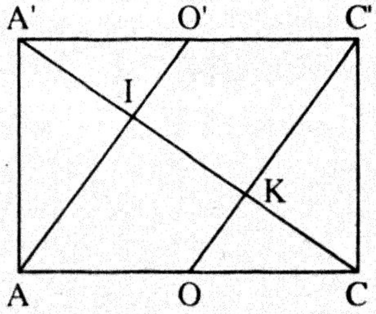
Xét ΔA'KC' có O' là trung điểm A'C' và IO' // KC' (cmt) ⇒ I là trung điểm A'K : A'I = IK. (2)

Từ (1) và (2) cho A'I = IK = KC.

c) Vì A'O' // AC nên theo định lí Talet ta có : $\frac{IO'}{IA} = \frac{A'O'}{AC} = \frac{1}{2}$, mà AO' là một đường trung tuyến của ΔAB'D' nên I là trọng tâm tam giác này. Chứng minh tương tự cho điểm K.



Hình 70



Hình 71

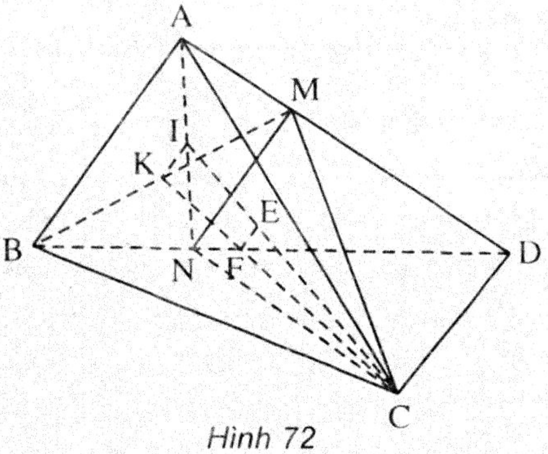
383. Từ gt cho $\frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DB} = \frac{MN}{AB} \Leftrightarrow \frac{DA - AM}{DA} = \frac{MN}{a}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{AM}{DA} = \frac{MN}{a} \Rightarrow MN = a(1 - m)$

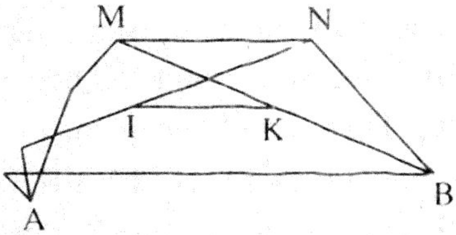
Dễ thấy $IK = \frac{1}{2}(AB - MN) = \frac{1}{2}[a - a(1 - m) = \frac{1}{2}ma$.

Gọi E, F theo thứ tự là trọng tâm ΔANC và ΔBMC thì EF // IK và

$\frac{EF}{IK} = \frac{CE}{CI} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}IK = \frac{1}{3}ma$.



Hình 72



Hình 73

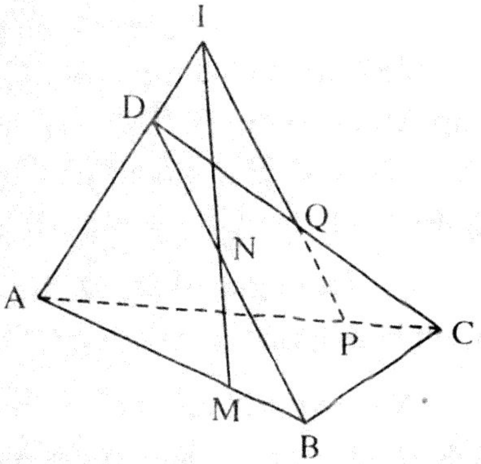
384. a) Vì M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng (α) (gt) mà $MN \nparallel PQ$ nên MN cắt PQ tại I. (Hình 74)

Ta thấy : I ∈ MN, mà MN ⊂ mp ABD nên I∈ mp ABD.

I ∈ PQ, mà PQ ⊂ mp ACD

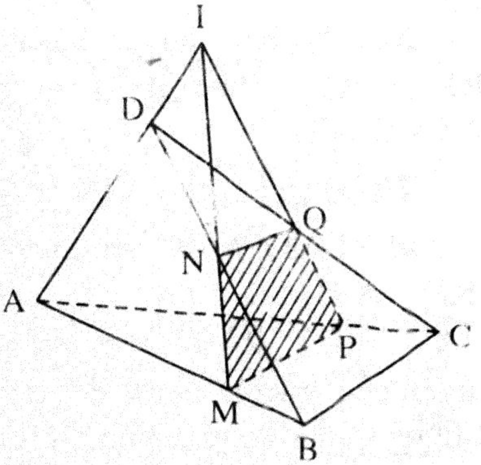
nên I ∈ mp ACD.

Thành thử I là điểm chung của hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) nên I phải thuộc giao tuyến AD của chúng. Nói khác : các đường thẳng chứa AD, MN, PQ đồng quy tại I.



Hình 74

b) Mp(α) cắt các mặt phẳng (ABD), (BCD), (ACD), (ABC) lần lượt theo các giao tuyến MN, NQ, PQ, MP nên thiết diện là tứ giác MNQP.



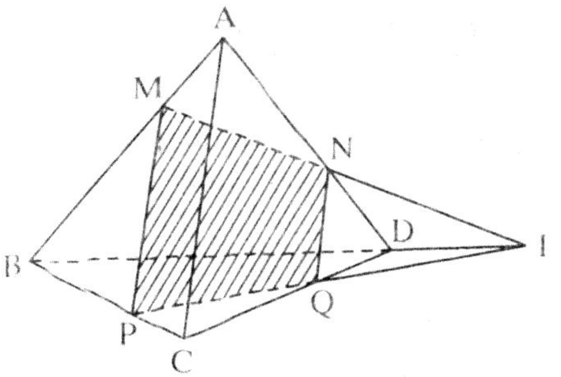
Hình 75

385. a) Mp ABD (chứa MN) cắt mp BCD theo giao tuyến BD, mà $MN \nparallel BD$ nên cắt BD tại I, I ∈ mp BCD nên I là giao điểm của đường thẳng MN với mp BCD.

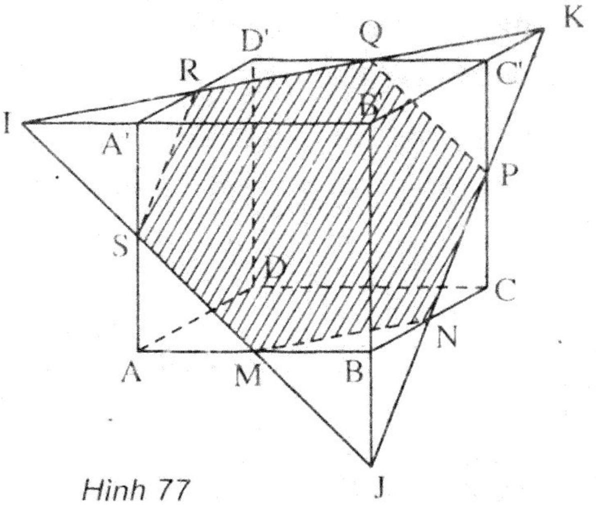
b) Đường thẳng PI ⊂ mp BCD, mp này cắt mp ACD theo giao tuyến CD. PI và CD cùng thuộc mp BCD nên chúng cắt nhau tại Q, Q chính là giao điểm của PI và mp ACD.

c) Mp MNP cắt mp ABC theo giao tuyến MP, cắt mp ABD theo giao tuyến MN, cắt mp ACD theo giao tuyến NQ, cắt mp BCD theo giao tuyến PQ.

d) Thiết diện do mp MNP cắt tứ diện là tứ giác MNQP.



Hình 76



Hình 77

386. a) RQ $\subset$ mp A'B'C'D', mp A'B'C'D' cắt mp BCC'B' theo giao tuyến B'C', RQ và B'C' cùng thuộc mp A'B'C'D', RQ $\not\parallel$ B'C' nên cắt B'C' tại K, K $\in$ mp BCC'B' nên K là giao điểm của RQ với mp BCC'B' (Hình 77).

Lập luận tương tự : I là giao điểm của RQ và mp ABB'A'.

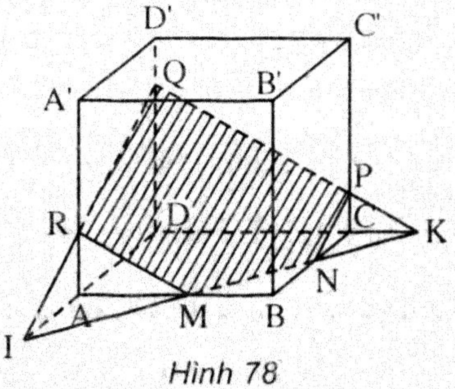
b) Lập luận tương tự : P là giao điểm của NK và mp CDD'C', J là giao điểm của NK và mp ABB'A'.

c) Lập luận tương tự như câu a.

d) Giao tuyến của mp NQR với các mặt của hình lập phương là : MN, NP, PQ, RQ, RS, SM.

e) Theo d $\Rightarrow$ thiết diện do mpNQR cắt hình lập phương là : MNPQRS.

387. Trước hết, ta nhận thấy MN $\subset$ mp ABCD. Kéo dài MN, nó cắt AD và CD kéo dài tại I, K. I và Q cùng thuộc mp ADD'A' nên IQ cắt AA' tại R. K và Q cùng thuộc mp CDD'C' nên KQ cắt CC' tại P. Thiết diện là ngũ giác MNPQR (hình 78).

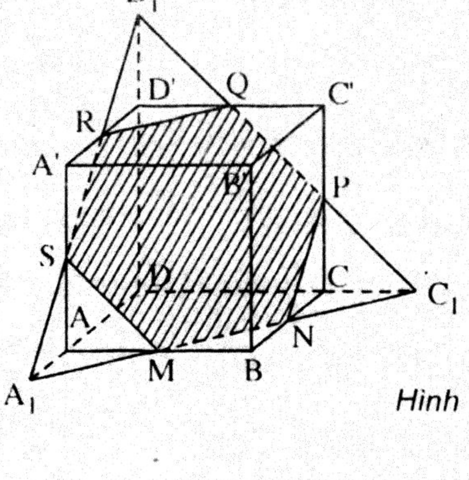


Hình 78

388. PQ cắt CD và DD' theo thứ tự tại C_1, D_1. NC_1 cắt AB và AD tại M và A_1.A_1D_1 cắt AA' và A'D' tại S, R. Thiết diện là lục giác MNPQRS. Ta phải chứng minh thiết diện là lục giác đều (Hình 79).

Thật vậy. Ta dễ dàng chứng minh các tam giác vuông $D_1D'Q$, QC'P, PCC_1 bằng nhau, suy ra : $CC_1 = D'D_1 = CP = \frac{1}{2}a$. Cũng dễ chứng minh các tam giác vuông BMN, AA_1M bằng nhau, suy ra :

$$BM = AM = AA_1 = BN = \frac{1}{2}a.$$



Hình 79

Dễ thấy các tam giác vuông AA_1S, $D'D_1R$ bằng nhau, suy ra S và R là trung điểm các cạnh AA' và A'D'.

Thành ra các đỉnh của hình lục giác là trung điểm các cạnh của hình lập phương nên mỗi cạnh của hình tam giác bằng nửa đường chéo hình vuông, bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

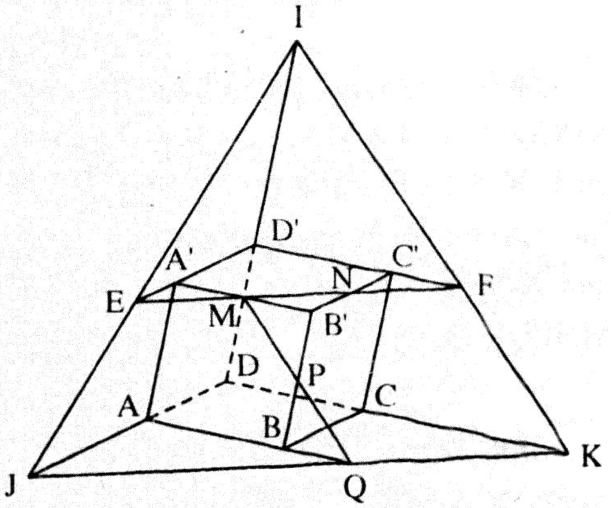
Cũng theo các chứng minh trên ta thấy các tam giác D_1RQ, SA_1M, PNC_1 là các tam giác đều bằng nhau nên các góc $\widehat{D_1RQ} = \widehat{D_1QR} = \widehat{A_1SM} = ... = 60^o \Rightarrow$ $\widehat{SRQ} = \widehat{RQP} = \widehat{RSM} = ... = 120^o$. Vậy thiết diện là lục giác đều. Để tìm diện tích thiết diện (diện tích lục giác đều) ta có thể tính theo một trong hai cách :

– Tìm diện tích tam giác đều $A_1C_1D_1$, trừ đi diện tích ba tam giác đều bằng nhau : D_1RQ, SA_1M, PNC_1.

– Tìm trực tiếp diện tích lục giác đều MNPQRS, bằng 6 lần diện tích của một tam giác đều OMN (O là giao điểm các đường chéo của lục giác đều), cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó: $\text{dtMNPQRS} = 6\text{dt }\Delta OMN = 6.\frac{1}{2}OM.ON\sin 60^o = 3\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

389. Theo gt : ΔIDK là tam giác vuông cân $\Rightarrow \Delta ID'F$ cũng là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông $D'F = \frac{3}{2}a$. Tương tự : $\Delta ID'E$ cũng là tam giác vuông cân cạnh $D'E = \frac{3}{2}a$. Như vậy $\Delta D'EF$ là tam giác vuông cân (Hình 80).



Hình 80

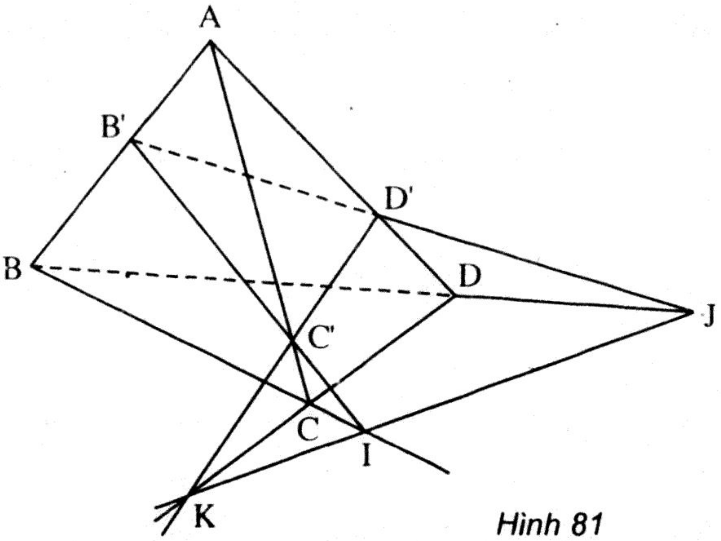
Dễ chứng minh các tam giác vuông: C'FN, B'MN, A'EM bằng nhau, có cạnh góc vuông bằng $\frac{1}{2}a \Rightarrow$ M, N là trung điểm các cạnh hình lập phương.

Lập luận tương tự : ΔDJK là tam giác vuông cân, nên ΔAJQ cũng là tam giác vuông cân, cạnh góc vuông bằng $\frac{3}{2}a$.

Dễ thấy các tam giác vuông B'MP, BPQ bằng nhau $\Rightarrow$ P là trung điểm BB'. Vậy thiết diện là tam giác đều MNP có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{dt}\Delta MNP = \frac{1}{2}MP.MN\sin 60^o = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

390. I ∈ B'C' mà B'C' ⊂ mp ABC nên I ∈ mp ABC, mp ABC cắt mp BCD theo giao tuyến BC, mà I là điểm chung của hai mặt phẳng này ⇒ I ∈ BC (Hình 81). Xác định tương tự các giao điểm J, K.



Hình 81

* Ta nhận thấy I, J là điểm chung của hai mp: (BCD) và (B'C'D') nên chúng cắt nhau theo giao tuyến IJ.

Ta lại có : K ∈ C'D' mà C'D' ⊂ mp B'C'D' nên K ∈ mp B'C'D' ; K ∈ CD mà CD ⊂ mp BCD nên K ∈ mp BCD.

Vậy K là điểm chung của hai mp : (BCD) và (B'C'D') nên K ∈ IJ là giao tuyến của chúng hay I, J, K thẳng hàng (đpcm).

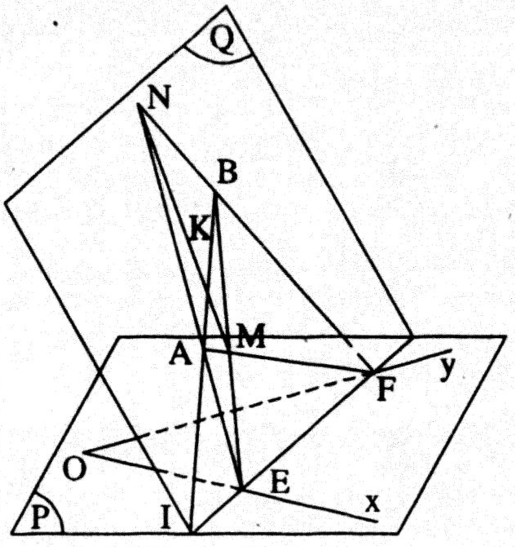
391. 1) Mp P và mp Q có chung nhau hai điểm E, F nên chúng cắt nhau theo giao tuyến EF, I ∈ AB nên I ∈ Q, I ∈ P. Vậy I ∈ EF. I cố định vì AB cố định. Vậy EF đi qua I cố định (hình 82).

2) Mp (A, Ox) và mp (B, Oy) có chung nhau hai điểm O, N nên chúng cắt nhau theo giao tuyến ON. Vậy tập N là nửa đường thẳng ON.

Đảo lại, nếu lấy điểm N bất kì thuộc nửa đường thẳng ON thì : ba điểm N, A, B không thẳng hàng xác định mp Q. Mp Q và mp NOx có chung nhau hai điểm N, A nên chúng cắt nhau theo giao tuyến NA. NA và Ox cùng thuộc mp NOx nên NA cắt Ox tại E.

Tương tự : NB cắt Oy tại F. Mp (A, Oy) và mp (B, Ox) có chung nhau hai điểm O, M nên chúng cắt nhau theo giao tuyến OM. Vậy tập M là nửa đường thẳng OM. Bạn đọc tự chứng minh phần đảo.

3) MN và AB cùng thuộc mp Q nên chúng cắt nhau tại K, K là giao điểm của AB và mp MON ; mp MON cố định, AB cố định nên K cố định.



Hình 82

4) ΔFEO cân đỉnh O $\Leftrightarrow$ OE = OF. Gọi Ot là tia phân giác góc $\widehat{xOy}$ mà theo tính chất tam giác cân thì $Ot \perp FE$. Vậy mp Q quay đến vị trí mà FE vuông góc với tia phân giác Ot của góc $\widehat{xOy}$.

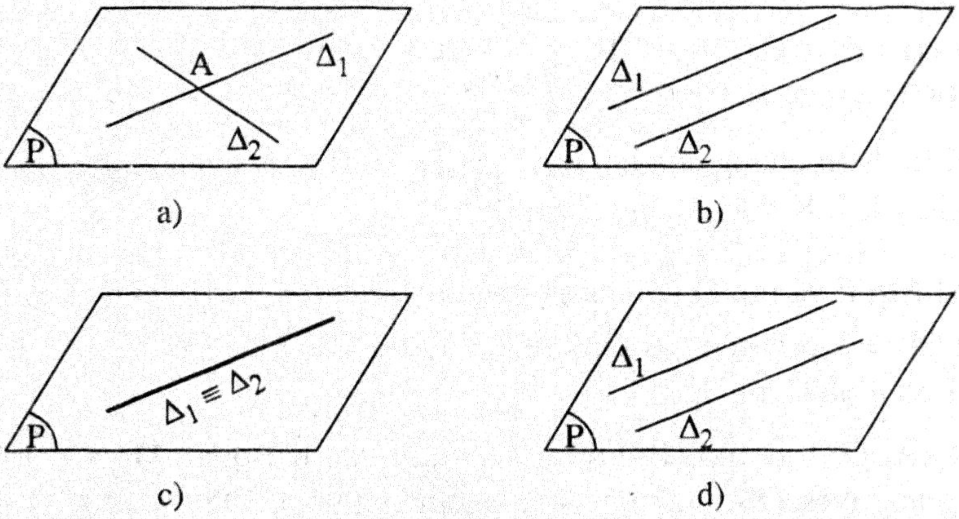
392. Cho 2 đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong không gian.

- Δ_1, Δ_2 đồng phẳng :

* Δ_1 cắt Δ_2 có chung duy nhất một điểm A ta nói Δ_1 cắt Δ_2 tại A và kí hiệu $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{A\}$ hay $\Delta_1 \cap \Delta_2 = A$ (Hình 83a)

* Δ_1 và Δ_2 không có điểm chung, ta nói Δ_1 song song với Δ_2 và kí hiệu $\Delta_1 // \Delta_2$ (Hình 83b)

* Δ_1 và Δ_2 có hai điểm chung, ta nói Δ_1 trùng với Δ_2 và kí hiệu $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ (Hình 83c)



a) b)

c) d)

Hình 83

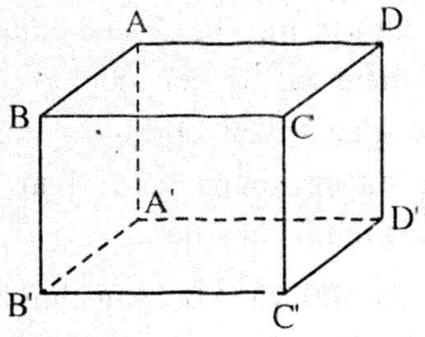
Như vậy hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung.

Ta cũng nói mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua hai đường thẳng song song.

- Δ_1, Δ_2 không cùng nằm trong một mặt phẳng (không đồng phẳng). Ta nói Δ_1 và Δ_2 chéo nhau hay Δ_1 chéo với Δ_2 (Hình 83d).

393. a) Các đường thẳng song song với BC: AD, A'D', B'C'.

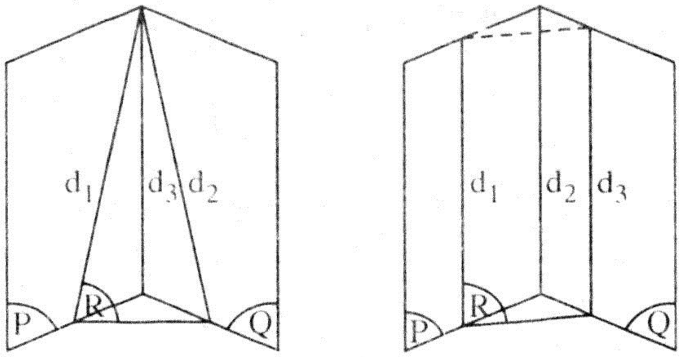
b) Các đường thẳng chéo nhau với BC : AA', DD' .



Hình 84

394. HS tự làm.

395. *Định lí.* Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc song song với nhau.

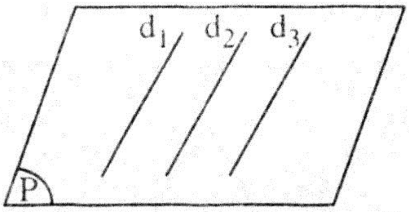


Hình 85

Hệ quả. Nếu hai mặt phẳng phân biệt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

396. GT $\begin{cases} d_1 // d_2 \\ d_3 // d_2 \end{cases}$ KL $\{ d_1 // d_2 // d_3$

Chứng minh



Hình 86

- Nếu d_1, d_2, d_3 cùng thuộc mặt phẳng P (đồng phẳng) mà $d_1 // d_2$ và $d_3 // d_2$ thì $d_1 // d_2 // d_3$ (Định lí trong hình học phẳng. Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau).

- Nếu d_1, d_2, d_3 không đồng phẳng. Giả sử d_1, d_2 cùng song song với d_3. Ta cần chứng minh $d_1 // d_3$. Trước tiên ta phải chứng minh d_1 và d_3 cùng thuộc một mặt phẳng. Gọi M là một điểm nằm trên d_1. Mặt phẳng R(M, d_3). Có hai trường hợp xảy ra.

* hoặc R chứa d_1

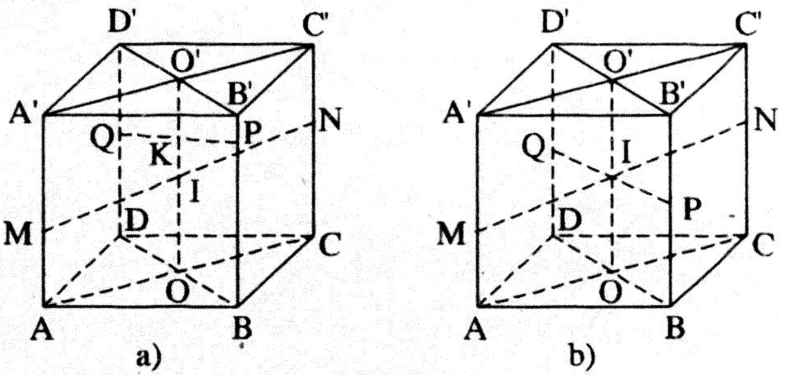
* hoặc R cắt d_1 tại M.

Nếu (R) cắt d_1 tại M thì d_2 cũng cắt (R) vì $d_1 // d_2$, d_2 cắt (R) suy ra d_3 cũng cắt (R) ($d_2 // d_3$) điều này vô lí vì (R) chứa d_3. Vậy (R) chứa d_1.

Bây giờ ta chứng minh d_1 và d_3 không có điểm chung. Nếu d_1 và d_3 có một điểm chung thì từ điểm chung này ta dựng được hai đường thẳng cùng song song với d_2, điều này trái với định lí 1.

Như vậy d_1, d_3 đồng phẳng và không có điểm chung suy ra $d_1 // d_3$. Do đó ta có $d_1 // d_2 // d_3$.

397. Hai mp : (ACC'A') và (BDD'B') cắt nhau theo giao tuyến O'O. Nếu MN và PQ cắt giao tuyến O'O tại hai điểm khác nhau I và K thì hai đường thẳng MN và PQ chéo nhau ⇒ bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng (Hình 87a).

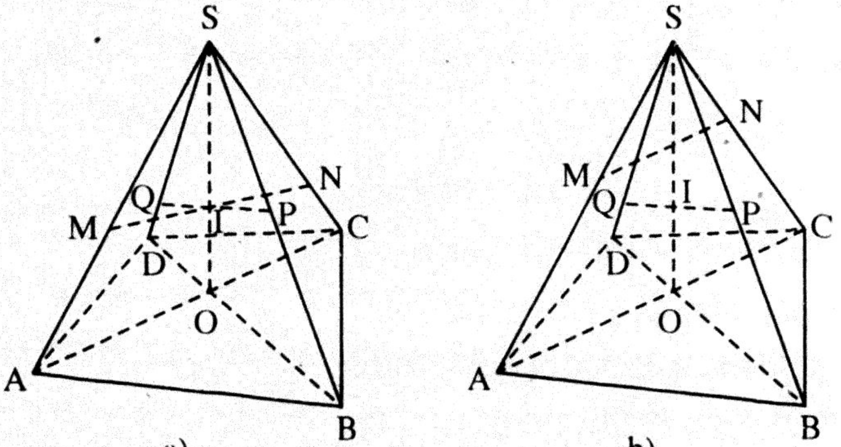

D'
C'
O'
A'
B'
Q
K
P
N
I
M
D
C
O
A
B
D'
C'
O'
A'
B'
N
Q
I
P
M
D
C
O
A
B

a) b)

Hình 87

Còn nếu MN và PQ cắt giao tuyến O'O tại một điểm I (Hình 87b) thì MN và PQ xác định một mặt phẳng ⇒ M, N, P, Q đồng phẳng.

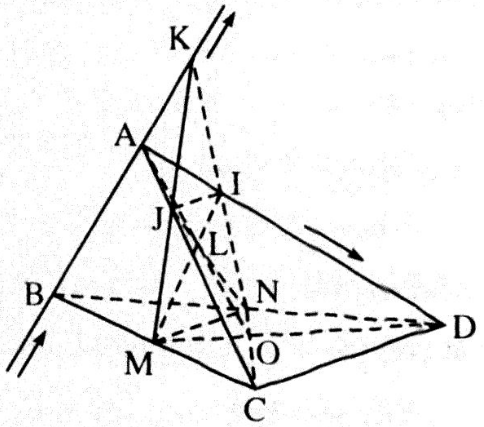
398. Cách làm như bài 397 (Hình 88)


S
N
Q
I
P
M
C
D
O
A
B
S
N
M
I
Q
P
C
D
O
A
B

a) b)

Hình 88

399. a) MN là đường trung bình của ΔBCD nên MN //= $\frac{1}{2}$CD. Mp P chứa MN, mp ACD chứa CD, mà MN // CD nên chúng cắt nhau theo giao tuyến JI // CD // MN. Thiết diện MNIJ là hình thang (hình 89).


K
A
I
J
L
B
N
D
M
O
C

Hình 89

– Khi mp P quay đến vị trí J là trung điểm AC thì I là trung điểm AD và IJ //= $\frac{1}{2}$CD. Lúc này IJ //= MN nên thiết diện là hình bình hành.

– Khi mp P quay ở vị trí đi qua A thì thiết diện là ΔAMN.

– Khi mp P quay ở vị trí trùng với mp BCD thì lúc này J ≡ C, I ≡ D và ta không có thiết diện.

b) K ∈ MJ mà MJ ⊂ mp ABC nên K ∈ mp ABC

K ∈ NI mà NI ⊂ mp ABD nên K ∈ mp ABD

Suy ra K là điểm chung của hai mp : (ABC) và (ABD) nên $K \in AB$ là giao tuyến của chúng.

Cho mp P quay theo chiều kim đồng hồ bắt đầu từ vị trí là mp MAN thì K chạy bắt đầu từ A theo chiều mũi tên (hình 89), còn I và J cũng chạy theo chiều mũi tên bắt đầu từ A, dọc theo cạnh AD và AC. Thiết diện vẫn là hình thang ($MN \parallel IJ \parallel MN > IJ$). Nhưng khi mp P quay đến vị trí mà I, J là trung điểm của AD, AC thì thiết diện là hình bình hành, lúc này $MJ \parallel NI$ nên chúng không cắt nhau. Chú ý rằng khi I và J sắp đến vị trí trung điểm thì MJ cắt NI tại K ở xa vô cực (phía trên). Mp P tiếp tục quay, và khi I, J vượt qua vị trí trung điểm thì thiết diện lại là hình thang, lúc này $MN \parallel IJ$, song $MN < IJ$ nên MJ cắt NI tại K ở xa vô cực (về phía dưới). Mp P vẫn tiếp tục quay cho đến khi $I \equiv D$, $J \equiv C$ thì $K \equiv B$.

Thành ra tập K là đường thẳng giao tuyến AB của hai mp ABC và mp ABD trừ đoạn thẳng AB.

Đảo lại, lấy một điểm K bất kì trên đường thẳng AB thì ta phải chứng minh K là giao điểm của MJ và NI (J, I là giao điểm của AC, AD với mp P).

Thật vậy, mp P cắt mp ABC theo giao tuyến MK, cắt mp ABD theo giao tuyến NK. $MK \subset$ mp ABC nên MK cắt AC tại J, $NK \subset$ mp ABD nên NK cắt AD tại I.

c) $L = NJ$ mà $NJ \subset$ mp CAN $\Rightarrow L \in$ mp CAN

$L \in MI$ mà $MI \subset$ mp DAM $\Rightarrow L \in$ mp DAM

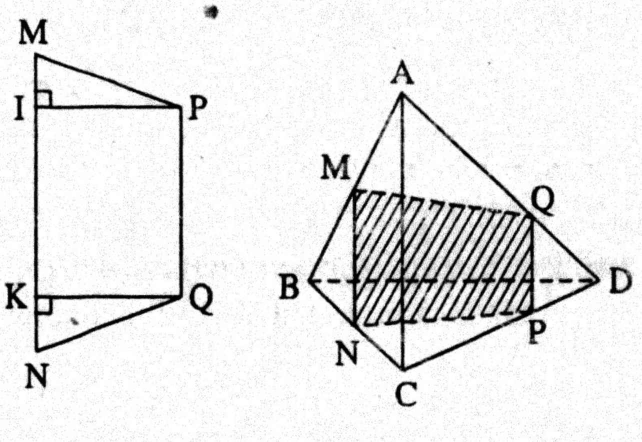
$L \in AO$ là giao tuyến của mp CAN và mp DAM.

Tập L là đoạn thẳng AO. Bạn đọc dễ dàng chứng minh phần đảo.

400. Dễ dàng xác định được thiết diện là hình thang MNPQ ($MN \parallel PQ \parallel AC$). Suy ra

$$AM = NC = DQ = DP = \frac{1}{3}a$$

Dễ thấy $\Delta AMQ = \Delta CNP$ (cgc) $\Rightarrow MQ = NP$ nên thiết diện là hình thang cân.



Hình 90

Áp dụng định lí hàm cosin vào ΔAMQ :

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 - 2AM.AQ\cos 60^\circ = \frac{1}{3}a^2.$$

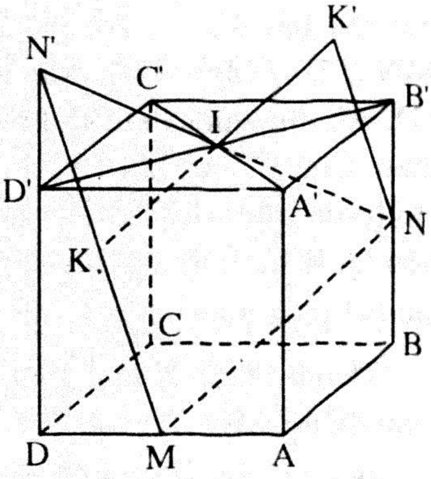
Cũng dễ chứng minh các tam giác vuông MIQ và NKP bằng nhau, cho $MI = KN$, suy ra :

$$MI = \frac{1}{2}(MN - PQ) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{6}a.$$

Từ tam giác vuông MIQ cho :

$$QI^2 = MQ^2 - MI^2 = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{36}a^2 = \frac{11a^2}{36} \Rightarrow QI = \frac{a\sqrt{11}}{6}$$

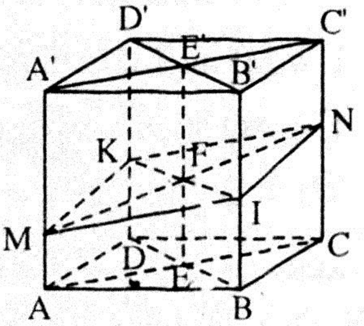
$$\text{dtMNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ)QI = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}$$



Hình 91

401. N và I cùng thuộc (BB'D'D) nên NI cắt DD' tại N', N' và M cùng thuộc (AA'D'D) nên N'M cắt A'D'. Trong (MNN'), qua I kẻ đường thẳng KK' song song MN. Đường thẳng KK' cắt (AA'D'D) tại K và (BCC'B') tại K'. Nói cách khác: do (ADD'A') // (BCC'B') (tính chất hình lập phương), bị (MNN') cắt nên các giao tuyến MK // NK' ⇒ MNK'K là hình bình hành : KK' // = MN = a (Hình 91).

Dễ thấy các tam giác vuông N'DI và NB'I bằng nhau (D'I = IB', $\widehat{N'ID'} = \widehat{NB'I}$ do đối đỉnh) ⇒ IN' = IN. Vậy I là trung điểm NN' ⇒ IK là đường trung bình của ΔMNN' nên $IK = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}a$



Hình 92

402. (AA'C'C) cắt (BB'D'D) theo giao tuyến EE'. MN cắt EE' tại F. Qua F kẻ KI // BD. Mặt phẳng chứa MN và song song với BD cắt hình lập phương theo thiết diện MNIK (Hình 92).

Do KI // BD (ta kẻ) và BI // KD (tính chất hình lập phương) nên BIKD là hình bình hành và cho BI = KD.

(AA'C'C) và (BB'D'D) chứa AA' // BB' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến EE' // AA' // CC' // BB' // DD' ⇒ BI = EF.

AMNC là hình thang và EF là đường trung bình nên :

$$EF = \frac{1}{2}(AM + CN)$$

Từ giả thiết cho : AM = nAA', CN = nCC'.

Vậy $EF = BI = \frac{1}{2}(m + n)BB' \Rightarrow \frac{BI}{BB'} = \frac{m + n}{2}$.

403. Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng P, ta có 3 trường hợp sau :

1) Δ và P không có điểm chung thì Δ song song với P và kí hiệu là Δ // P hay P // Δ.

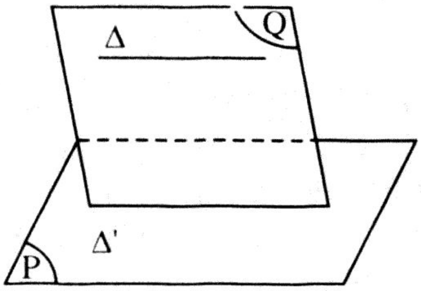
2) Δ và P có một điểm chung duy nhất là M thì Δ cắt P tại M kí hiệu là $\Delta \cap (P) = \{M\}$.

3) Δ và P có từ 2 điểm chung trở lên thì Δ nằm trong P hoặc nói mp P chứa Δ và kí hiệu $\Delta \subset P$ hay $P \supset \Delta$.

404. Giả thiết và kết luận *định lí 1* như sau :

$$\text{GT}\begin{cases}\Delta \not\subset (P), \Delta' \subset (P)\\ \Delta // \Delta'\end{cases}$$

$$\text{KL}\{\Delta // P$$



Hình 93

Chứng minh : Δ // Δ' xác định mp Q. Như vậy $\Delta' = P \cap Q$

Nếu Δ cắt P tại A thì A thuộc giao tuyến Δ' của P và Q cho ta $\{A'\} = \Delta \cap \Delta'$ điều này mâu thuẫn với giả thiết Δ // Δ'

Vậy Δ và P không có điểm chung mà Δ không thuộc P do đó Δ // P.

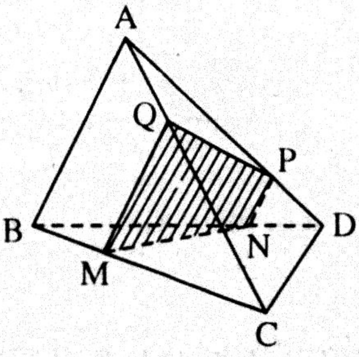
405. HS tự chứng minh *định lí 2*

406. *Định lí 3.* Nếu hai mặt phẳng α, β cắt nhau cùng song song với đường thẳng d thì giao tuyến d' của chúng cũng song song với d.

HS tự chứng minh.

407. *Định lí 4.* Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường này và song song với đường kia.

408. Mp (MN) // AB nên cắt mp(ABC) theo giao tuyến MQ // AB. Tương tự nó cắt mp (ABD) theo giao tuyến NP // AB. Suy ra MQ // NP và thiết diện là hình thang MNPQ (Hình 94)



Hình 94

Muốn thiết diện là hình bình hành thì MN // PQ. Như vậy, mp(BCD) chứa MN, mp(ACD) chứa PQ mà PQ // MN nên giao tuyến CD // MN ⇒ mp(MN) phải song song với AB và CD (1)

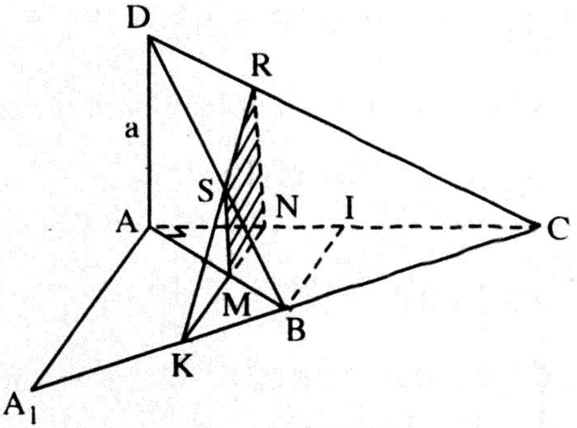
Hình thoi là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên muốn MNPQ là hình thoi thì MN = MQ. Ta nhận thấy do MN // CD nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow MN = \frac{BM}{BC}.CD$.

Tương tự. $MQ = \frac{MC}{BC}.AB \Rightarrow \frac{MN}{MQ} = \frac{BM}{MC}.\frac{CD}{AB}$. Muốn MN = MQ ⇒ $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{CD}$, nghĩa là M chia BC theo tỉ số $\frac{AB}{CD}$ (2).

Hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông nên *phải có điều kiện* (1), *đồng thời* $AB \perp CD$. (3)

Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên phải có điều kiện (1), (2), (3).

409. a) Do mp P song song với AD nên cắt mp ABD và mp ACD theo hai giao tuyến MS và NR cùng song song AB ⇒ MS // NR. Do mp P // BI nên cắt mp ABC theo giao tuyến MN // BI. Lại do AD ⊥ BI ⇒ MS ⊥ MN. Vậy thiết diện MNRS là hình thang vuông (hình 95).



Hình 95

b) $\text{dtMNRS} = \frac{1}{2}(\text{MS} + \text{NR}).\text{MN}$.

ΔABD cân đỉnh A do AB = AD = a ⇒ ΔBMS cân đỉnh M và cho MS = MB = a − x.

ΔABI vuông cân đỉnh A do AB = AI = a ⇒ AM = AN = x và $\text{MN} = x\sqrt{2}$ ⇒ CN = 2a − x

Vì $\text{AD} = \frac{1}{2}\text{AC} \Rightarrow \text{NR} = \frac{1}{2}\text{NC} = \frac{1}{2}(2a - x) = a - \frac{1}{2}x$.

$$\text{Vậy dtMNRS} = \frac{1}{2}\left(a - x + a - \frac{1}{2}x\right)x\sqrt{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}x\left(2a - \frac{3}{2}x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{2}x^2 + 2ax\right)$$

Biểu thức trong ngoặc đơn là một tam thức bậc hai có $-\frac{3}{2} < 0$ nên bề lõm của Parabol quay xuống dưới và có cực đại với $x = \frac{2a}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a \Rightarrow \text{AM} = \frac{2}{3}\text{AB}$ thì thiết diện có diện tích lớn nhất.

c) K ∈ SR mà SR ⊂ mp BCD nên K ∈ mp BCD

K ∈ MN mà MN ⊂ mp ABC nên K ∈ mp ABC

K ∈ BC là giao tuyến của mp BCD và mp ABC.

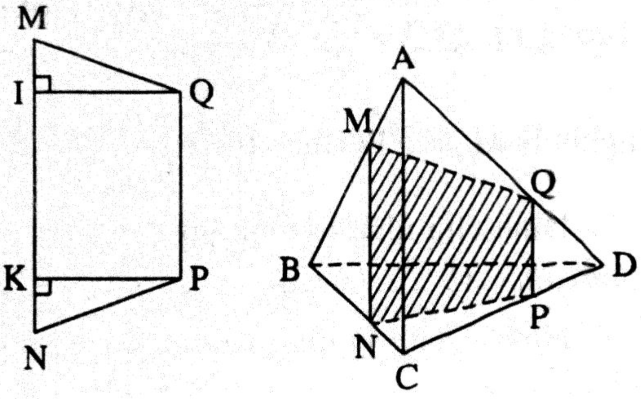
Nhưng vì M ∈ AB nên K ∈ A_1B. Vậy tập K là đoạn thẳng A_1B thuộc giao tuyến BC.

410. Xác định thiết diện như bài 408, được thiết diện là hình thang MNPQ (MN // PQ // AC). Suy ra

$\text{AM} = \text{NC} = \text{DQ} = \text{DP} = \frac{1}{3}a$.

Dễ thấy ΔAMQ = ΔCNP (cgc)

⇒ MQ = NP nên thiết diện là hình thang cân.



Hình 96

Áp dụng định lí hàm cosin vào ΔAMQ :

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 - 2AM.AQ.\cos 60^o = \frac{1}{3}a^2.$$

Cũng dễ chứng minh các tam giác vuông MIQ và NKP bằng nhau, cho MI = KN, suy ra :

$$MI = \frac{1}{2}(MN - PQ) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{6}a.$$

Từ tam giác vuông MIQ cho :

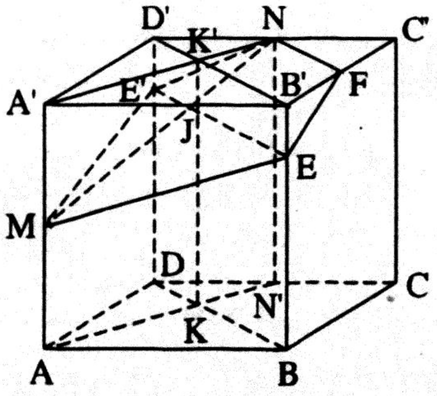
$$QI^2 = MQ^2 - MI^2 = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{36}a^2 = \frac{11a^2}{36} \Rightarrow QI = \frac{a\sqrt{11}}{6}.$$

$$\text{dt}\, MNPQ = \frac{1}{2}(MN + PQ)QI = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}.$$

411. a) $MN \subset$ mp(AA'NN'). Mặt phẳng này cắt mp(BB'D'D) theo giao tuyến KK', MN cắt KK' tại J, J là giao điểm của MN và mp(BB'D'D).

b) Qua J kẻ EE' // BD, EE' chính là giao tuyến của (P) với mp(BB'D'D).

(P) cắt mp(A'B'C'D') chứa hai đường thẳng EE' // B'D' nên chúng phải cắt nhau theo giao tuyến NF song song với chúng. Thiết diện là ngũ giác MEFNE' (Hình 97).



Hình 97

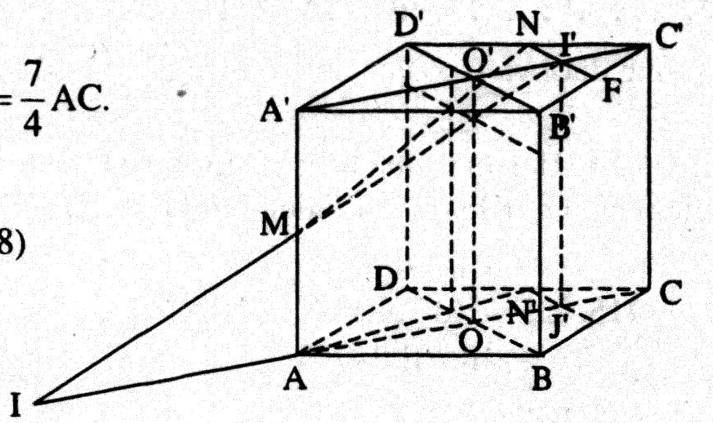
c) NF cắt A'C' tại I'. $MI' \subset$ mp (AA'C'C) nên MI' cắt AC tại I.

d) Dễ thấy $MA /\!/ = \frac{1}{2}I'J' \Rightarrow$ A là trung điểm IJ', nên $\frac{IA}{IJ'} = \frac{1}{2}$ và

$$IA = AJ' = \frac{3}{4}AC$$

$$\Rightarrow IC = IA + AC = \frac{3}{4}AC + AC = \frac{7}{4}AC.$$

Do đó $\frac{IA}{IC} = \frac{\frac{3}{4}AC}{\frac{7}{4}AC} = \frac{3}{7}$ (Hình 98)



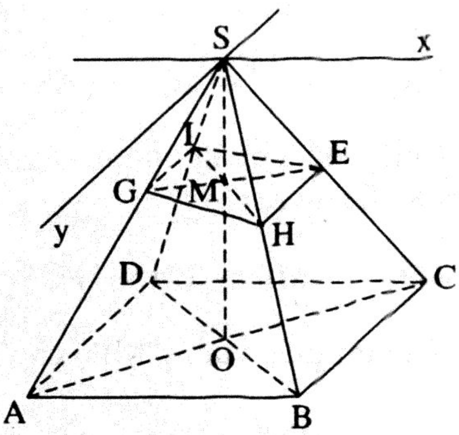
Hình 98

412. a) (SAB) và (SCD) chứa AB // CD nên chúng cắt nhau theo giao tuyến Sx // AB // CD.

- Tương tự : mp(SAD) cắt mp(SBC) theo giao tuyến Sy // AD // BC.

Sx, Sy giao nhau tạo thành mặt phẳng, mặt phẳng này có hai đường thẳng giao nhau tương ứng song song với hai đường thẳng giao nhau của (ABCD) : Sx // AB, Sy // AD ⇒ (xSy) // mp(ABCD).

b) Mp P(E) // BC cắt mpSBC theo giao tuyến HE // BC. Vì E là trung điểm SC nên H là trung điểm SB ⇒ HE cố định.



Hình 99

c) HE // BC // AD. Mp P chứa HE, mp (SAD) chứa AD ⇒ giao tuyến GI của chúng phải song song AD. Vậy thiết diện GHEI là hình thang (hình 99)

d) mp(SAC) cắt mp(SBD) theo giao tuyến SO, M ∈ SO. Vậy khi G chạy trên SA thì M chạy trên đoạn SO.

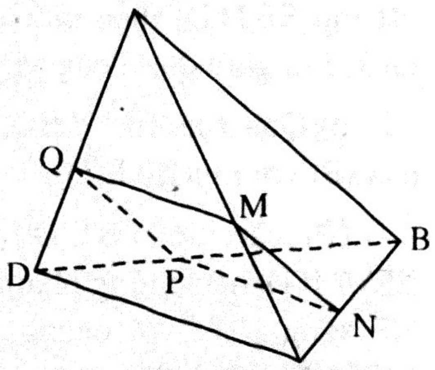
413. a) HS tự làm .

b) Ta có B'D' // AB ⇒ đpcm.

c) Ta có :

$$MN = \frac{a(c-x)}{c},\ MQ = \frac{bx}{c}$$

Gọi góc tạo bởi AB và CD là α thì α không đổi khi M chạy trên AC. Lại có MN // AB, PN // CD nên $\widehat{MNP} = \alpha$.



Hình 100

$$\text{dtMNPQ} = MN.PN\sin\alpha = \frac{ab}{c^2}\sin\alpha.x(c-x)\,.$$

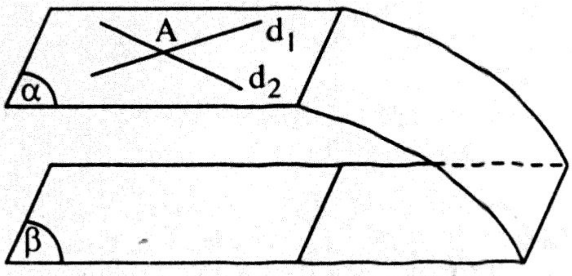
d) dt MNPQ lớn nhất phụ thuộc vào tích x(c – x) lớn nhất. Biểu thức $y = -x^2 + cx$ là hàm số bậc hai với a = – 1 < 0 nên có bề lõm của parabol quay xuống dưới và y có cực đại với $x = \frac{1}{2}c$ ⇒ M là trung điểm AC.

414. Hai mặt phẳng P và Q gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung. Khi đó ta kí hiệu P // Q hay Q // P.

415. $GT\begin{cases} d_1 \cap d_2 = A \\ \alpha(d_1, d_2) \\ d_1 // \beta, d_2 // \beta \end{cases}\quad KL\{\alpha // \beta.$

Chứng minh

Giả sử α không song song với β mà d = α ∩ β mà $d_1 // \beta$, $d_1 \subset \alpha \Rightarrow d_1 // \alpha$, tương tự $d_2 // d \Rightarrow d_1 // d_2 // \alpha$ (định lí)



Hình 101

Trái với giả thiết d_1 và d_2 cắt nhau tại A. Vậy α // β.

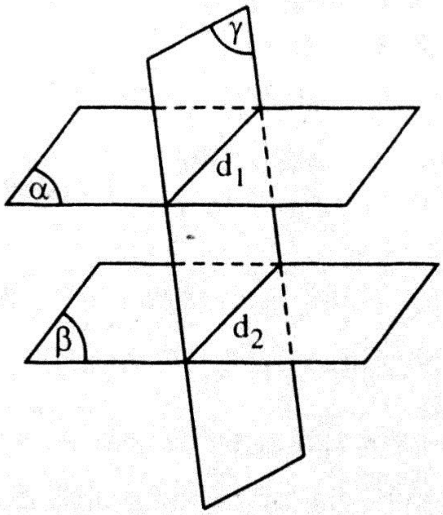
416. *Định lí 2.* Qua một điểm A nằm ngoài mặt phẳng α cho trước có một và chỉ một mặt phẳng β song song với mặt phẳng α.

Hệ quả 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng α thì qua d có duy nhất mặt phẳng β song song với α.

Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng α. Mọi đường thẳng d đi qua A và song song với α đều nằm trong mặt phẳng β đi qua A và song song với α.

417. $$\text{GT}\begin{cases}\alpha /\!/ \beta\\ \alpha \cap \gamma = d_1\\ \beta \cap \gamma = d_2\end{cases} \text{ KL } \{d_1 /\!/ d_2$$

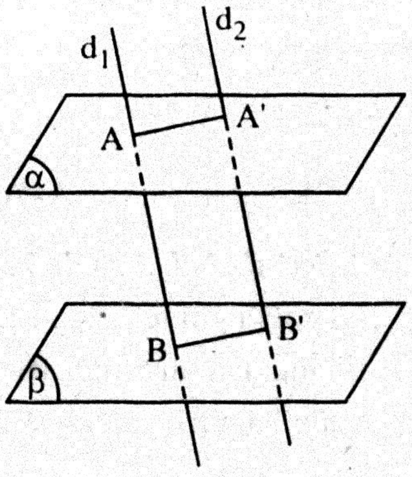


Hình 102

Chứng minh

Giả sử γ cắt α theo giao tuyến d_1. Do γ chứa d_1 nên không thể trùng với β. γ cũng không song song với β bởi vì nếu γ // β suy ra qua đường thẳng d_1 có hai mặt phẳng α, γ cũng song song với β. Điều đó là vô lí. Vậy γ cắt β theo giao tuyến d_2, d_1 và d_2 đều thuộc γ và không có điểm chung vì nếu có điểm chung thì α cắt β hoặc α ≡ β trái với giả thiết $\alpha /\!/ \beta \Rightarrow d_1 /\!/ d_2$.

418. $$\text{GT}\begin{cases}\alpha /\!/ \beta\\ d_1 /\!/ d_2\\ d_1 \cap \alpha = A\\ d_1 \cap \beta = B\\ d_2 \cap \alpha = A'\\ d_2 \cap \beta = B'\end{cases} \text{ GT}\{AB = A'B'$$



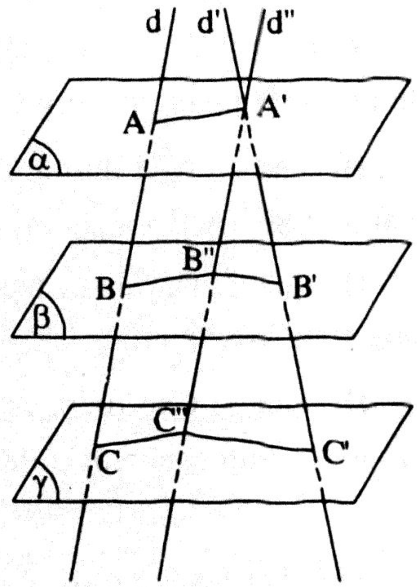
Hình 103

Chứng minh. Mặt phẳng γ (d_1 // d_2) (Hình 103)

Dễ dàng có tứ giác AA'B'B là hình bình hành (AB // A'B', AA' // BB' (định lí) ⇒ AB = A'B'.

419. *Định lí 5.* (định lí Talet)

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

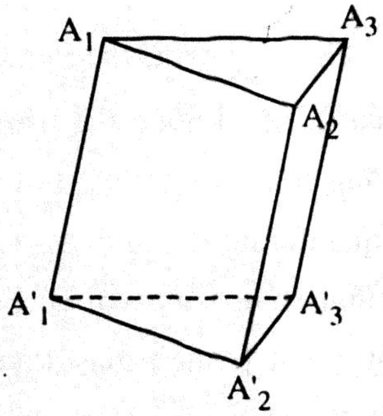


Hình 104

Trường hợp d và d' đồng phẳng. Áp dụng định lí ta lét trong mặt phẳng P(d, d') ta có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$

- Trường hợp d và d' chéo nhau, khi đó A' không nằm trên d. Qua A' vẽ đường thẳng d'' // d, nó cắt hai mặt phẳng α và β lần lượt ở B'' và C''. Theo định lí 4 thì $AB = A'B''$, $BC = B''C''^{(*)}$. Mặt phẳng Q(d', d'') cắt β và γ theo hai giao tuyến song song B''B', C''C'. Trong ΔA'C''C'. Ta có $\frac{A'B''}{A'B'} = \frac{B''C''}{B'C'}$ thay (*) vào đẳng thức này ta có :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}. \text{ Từ đó suy ra } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



Hình 105

420. Hình 105 gọi là hình lăng trụ được kí hiệu là $A_1A_2A_3.A'_1A'_2A'_3$.

- Hai miền đa giác $A_1A_2A_3$ và $A'_1A'_2A'_3$ được gọi là hai mặt phẳng đáy của lăng trụ. Hai mặt đáy của lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song và là hai đa giác bằng nhau.

- Các mặt bên là các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$,...

- Các cạnh $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$... gọi là cạnh bên của lăng trụ

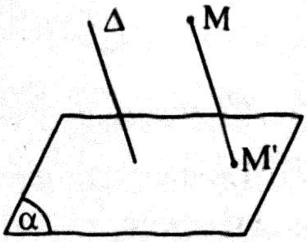
- Các đỉnh của hai đa giác gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.

Người ta gọi tên lăng trụ dựa vào số cạnh của đáy của nó.

Chẳng hạn như hình 105 gọi là hình lăng trụ tam giác.

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

421. Cho mp α và đường thẳng Δ. Với mỗi điểm M trong không gian, ta xác định điểm M' bằng cách từ M kẻ đường thẳng d // Δ, thì $M' = d \cap \alpha$. Điểm M' gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng α theo phương Δ (mp α gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng Δ gọi là phương chiếu).



Hình 104

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó lên mặt phẳng α được gọi là phép chiếu song song lên α theo phương Δ.

422. Phép chiếu song song có các tính chất sau :

1) Hình chiếu song song của 3 điểm thẳng hàng là 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi vị trí của 3 điểm đó.

2) Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng, của tia là tia, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

3) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song (phép chiếu song song bảo toàn tính song song của các đường thẳng).

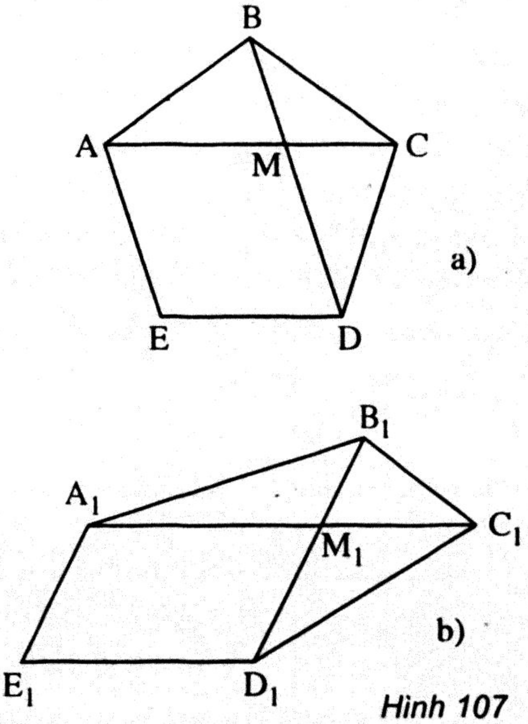
4) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên cùng một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

423. • *Tam giác*. Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của mọi tam giác (tam giác đều, cân, vuông,...)

• *Hình bình hành*. Một hình bình hành bất kì cũng có thể coi là hình biểu diễn của hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi.

• *Hình thang*. Một hình thang bất kì cũng có thể coi là hình biểu diễn của hình thang tuỳ ý nhưng tỉ số độ dài của hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đấy của hình thang ban đầu.

• *Hình elíp*. Người ta thường dùng elíp để biểu diễn cho hình tròn.

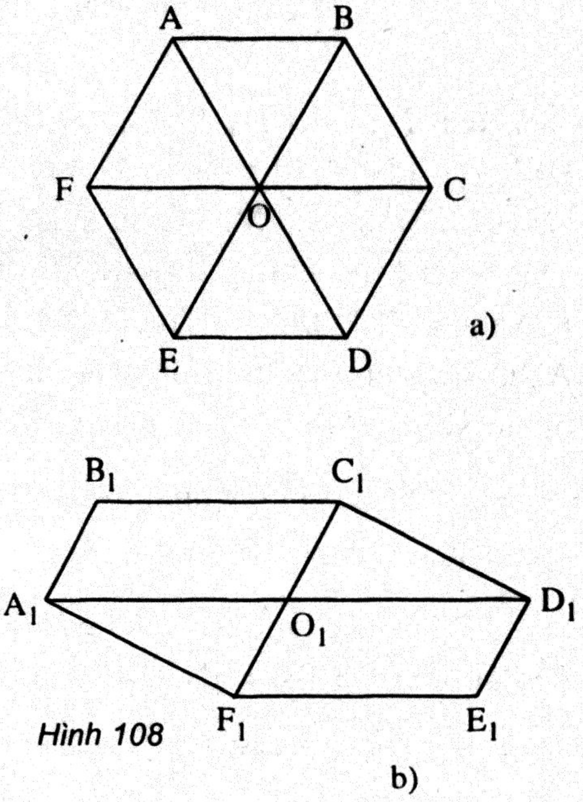


Hình 107

424. Cho ngũ giác đều ABCD. Dễ dàng chứng minh được AMDE là hình thoi và $\frac{MC}{AM} \approx \frac{2}{3}$, $\frac{BM}{MD} \approx \frac{2}{3}$. Các tỉ số này giữ nguyên trên hình biểu diễn.

Từ đó muốn vẽ hình biểu diễn của ngũ giác đều ta làm như sau :

Vẽ hình bình hành $A_1M_1D_1E_1$. Trên tia đối của tia M_1A_1 lấy điểm C_1 sao cho $M_1C_1 = \frac{2}{3}M_1A_1$. Trên tia đối của tia M_1D_1 lấy điểm B_1 sao cho $M_1B_1 = \frac{2}{3}M_1D_1$. nối các điểm A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ta được đa giác $A_1B_1C_1D_1E_1$ là hình biểu diễn của đa giác đều ABCDE (Hình 107b)

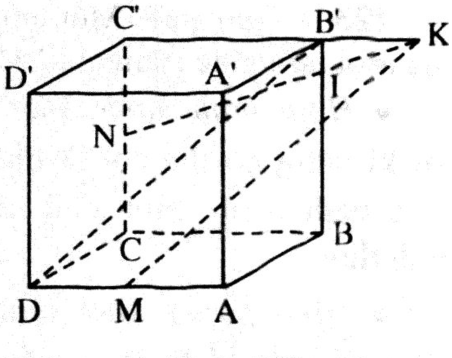


Hình 108

• Cho lục giác đều ABCDEF. Dễ dàng chứng minh được ABCO, ODEF,... là những hình thoi bằng nhau. Từ đó suy ra cách vẽ hình biểu diễn hình lục giác đều như sau :

Vẽ hình bình hành $A_1B_1C_1O_1$. Trên tia đối của tia O_1A_1 lấy điểm D_1 sao cho $O_1D_1 = O_1A_1$. Trên tia đối của tia O_1C_1 lấy F_1 sao cho $O_1F_1 = O_1C_1$. Vẽ hình bình hành $O_1D_1E_1F_1$. Nối C_1 và D_1, A_1 và F_1. Ta được lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ là hình biểu diễn của lục giác đều ABCDEF (Hình 108b)

425. Để ý rằng AD // = B'C' nên có mp AB'C'D. Trong mp này kẻ MK // DB' thì K ∈ B'C' và tứ giác B'DMK là hình bình hành vì các cạnh đối song song với nhau ⇒ MD // = KB'. Mp MNK chứa MK song song với DB' nên nó là mp phải dựng thoả mãn điều kiện đầu bài. N, K ∈ mp BCC'B' nên KN cắt BB' tại I, I chính là giao điểm của BB' với mp MNK (hình 109).



Hình 109

Do BB' // CC' nên :

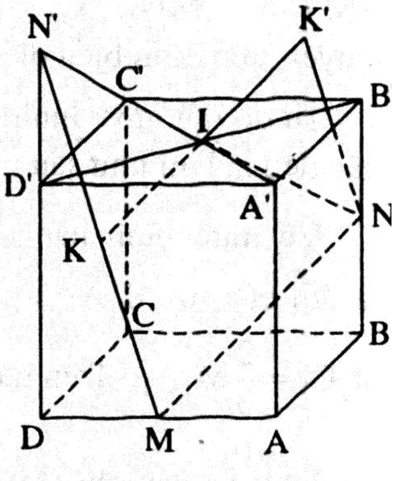
$$\frac{IB'}{NC'} = \frac{KB'}{KC'}$$

Gọi cạnh hình lập phương là 1 đơn vị dài thì $KB' = MD = \frac{1}{2}$,

$$KC' = KB' + B'C' = \frac{3}{2}.\ \text{Vậy}\ \frac{IB'}{NC'} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IB'}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow IB' = \frac{1}{6}$, nghĩa là mp MNK chia BB' theo tỉ số $\frac{IB'}{BB'} = \frac{1}{6}$.

4.26. N và I cùng thuộc mp BB'D'D nên NI cắt DD' tại N', N' và M cùng thuộc mp AA'D'D nên N'M cắt A'D'. Trong mp MNN', qua I kẻ đường thẳng KK' song song MN. Đường thẳng KK' cắt mp AA'D'D tại K và mp BCC'B' tại K'. Nói cách khác : do mp ADD'A' // mp BCC'B' (tính chất hình lập phương), bị mp MNN' cắt nên các giao tuyến MK // NK'



Hình 110

⇒ MNK'K là hình bình hành :

KK' // = MN = a (Hình 110).

Dễ thấy các tam giác vuông N'D'I và NB'I bằng nhau (D'I = IB', $\widehat{N'ID'} = \widehat{NIB'}$ do đối đỉnh) ⇒ IN' = IN. Vậy I là trung điểm NN' ⇒ IK là đường trung bình Δ MNN' nên $IK = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}a$.

427. Dễ thấy thiết diện là hình bình hành (bài 413).

Do MN // BC :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = n \Rightarrow MN = nBC.$$

Có $BM = AB - AM = (1 - n)AB$

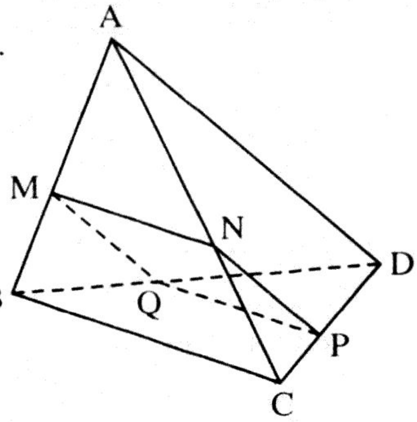
$$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = 1 - n$$

Do MQ // AD nên : $\dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{BM}{BA}$

$= 1 - n = \Rightarrow MQ = (1 - n)AD.$

Muốn thiết diện là hình thoi, phải có MN = MQ

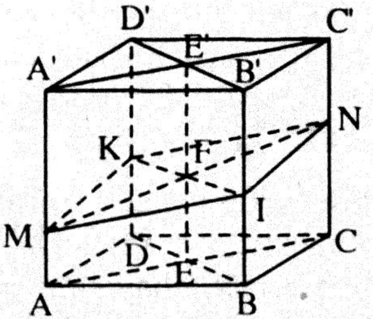
$$\Leftrightarrow nBC = (1 - n)AD \Leftrightarrow \frac{n}{1 - n} = \frac{AD}{BC} = k \Rightarrow n = \frac{k}{1 + k}.$$



Hình111

428. Mp AA'C'C cắt mp BB'D'D theo giao tuyến EE'. MN cắt EE' tại F. Qua F kẻ KI // BD. Mp chứa MN và song song với BD cắt hình lập phương theo thiết diện MINK (hình 112).

Do KI // BD (ta kẻ) và BI // KD (tính chất hình lập phương) nên BIKD là hình bình hành và cho BI = KD.



Hình 112

Mp AA'CC' và mp BB'DD' chứa AA' // BB' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến EE' // AA' // CC' // BB' // DD' ⇒ BI = EF.

AMNC là hình thang và EF là đường trung bình nên :

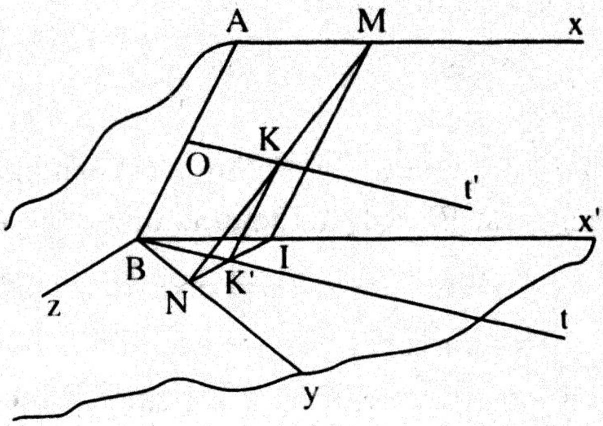
$$EF = \frac{1}{2}(AM + CN)$$

Từ gt cho : AM = mAA', CN = nCC'.

Vậy $EF = BI = \dfrac{1}{2}(m + n)BB' \Rightarrow \dfrac{BI}{BB'} = \dfrac{m + n}{2}$

429. a) Do mp P(By) // Ax nên mp P cắt mp BAx theo giao tuyến Bx' // Ax. Vì MI // AB nên I là giao điểm của MI và Bx'. Vậy ABIM là hình bình hành và AM = BI ⇒ M chạy trên Ax thì I chạy trên Bx' // Ax. Tập I là tia Bx'. Bạn đọc dễ dàng chứng minh phần đảo.

b) Vì BN = AM mà AM = BI nên BN = BI ⇒ ΔBIN cân đỉnh B.



Hình 113

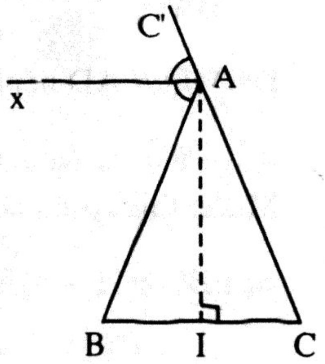
Kẻ tia phân giác Bt của góc $\widehat{x'By}$ thì Bt ⊥ NI tại K', là trung điểm NI.

Kẻ Bz ⊥ Bt thì mp ABz cố định và mp ABz // mp MIN ⇒ MN // mp Abz.

c) KK' là đường trung bình của ΔMIN nên $KK' /\!/ = \frac{1}{2}MI = /\!/ \frac{1}{2}AB /\!/ = BO$ (O là trung điểm AB) ⇒ BOKK' là hình bình hành.

Theo câu a, khi M chạy trên Ax thì I chạy trên Bx' và K' chạy trên Bt ⇒ K chạy trên Ot' // Bt.

Bạn đọc tự chứng minh phần đảo.

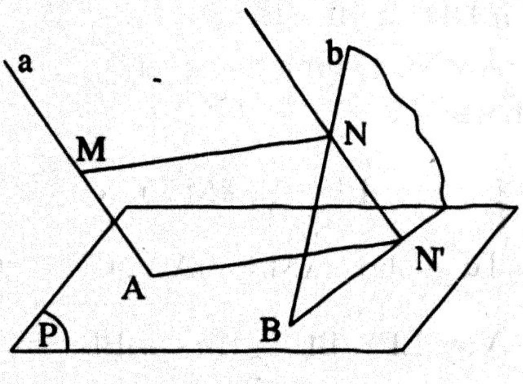


Hình 114

430. ΔABC cân đỉnh A nên AI vừa là đường cao, vừa là tia phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Góc ngoài $\widehat{BAC'}$ kề bù với góc trong $\widehat{BAC}$ nên tia phân giác ngoài Ax của góc $\widehat{BAC}$ vuông góc AI (tính chất tia phân giác của hai góc kề bù). Do đó Ax // BC (cùng vuông góc AI) ⇒ Ax // mp DBC.

Tương tự, tia phân giác ngoài Ay của góc $\widehat{CAD}$ song song CD ⇒ Ay // mp DBC, tia phân giác ngoài Az của góc $\widehat{BAD}$ song song BD ⇒ Az // mp DBC.

Thành thử mp qua A song song mp BCD phải chứa các tia Ax, Ay, Az (theo định lí) ; nói cách khác : các tia phân giác ngoài này cùng thuộc một mp (Hình 114).



Hình 115

431. a) Gọi mp Q xác định bởi đường thẳng b và NN'. Mp P và mp Q cắt nhau theo giao tuyến BN'. Khi N chạy trên b thì N' chạy trên giao tuyến BN'. Bạn đọc tự chứng minh phần đảo.

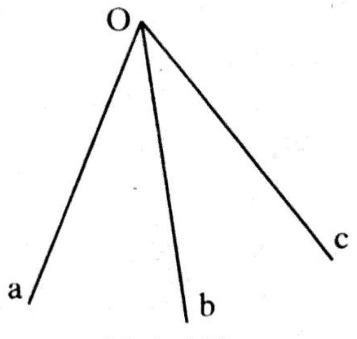
b) Vì MN // P (gt) nên mp xác định bởi a và MN cắt P theo giao tuyến AN' // MN. Mà NN' // AM (gt) nên AMNN' là hình bình hành.

c) Vì MN // = AN' mà MN = d ⇒ AN' = d. Vì vậy, muốn dựng MN ta dựng AN' như sau :

Trong mp P, lấy A làm tâm, bán kính bằng d quay một cung : * Nếu cung này không cắt BN' thì bài toán không dựng được. * Nếu cung này tiếp xúc BN' tại một điểm N_o thì từ N_o ta dựng một đường thẳng song song a, cắt b tại N.

Trong mp (a, NN_o) dựng MN // AN_o thì MN = d (theo câu b) là đường thẳng phải dựng. Bài toán có một nghiệm hình – Bạn đọc dễ dàng chứng minh cách dựng là đúng. * Nếu cung này cắt BN' tại hai điểm N_1', N_2' thì ta cũng dựng như trên sẽ được hai đoạn thẳng $MN_1 = MN_2$ thoả mãn điều kiện đầu bài. Bài toán có hai nghiệm hình. Bạn đọc tự chứng minh cách dựng là đúng.

432. Giả sử có 3 đường a, b, c không đồng phẳng, không đồng quy và đôi một cắt nhau. Gọi $O = a \cap b$, $O' = a \cap c$, $O'' = b \cap C$. Nếu 3 điểm O, O', O'' là phân biệt, dễ dàng thấy a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng trái với giả thiết, nên O, O', O'' phải trùng nhau. Vậy a, b, c đồng quy.



Hình 116

433. a) Hình chóp ngũ giác có 5 cạnh đáy. Số cạnh bên có được là do nối đỉnh hình chóp với các đỉnh của đáy suy ra có 5 cạnh bên. Vậy số cạnh của hình chóp ngũ giác là 10 cạnh.

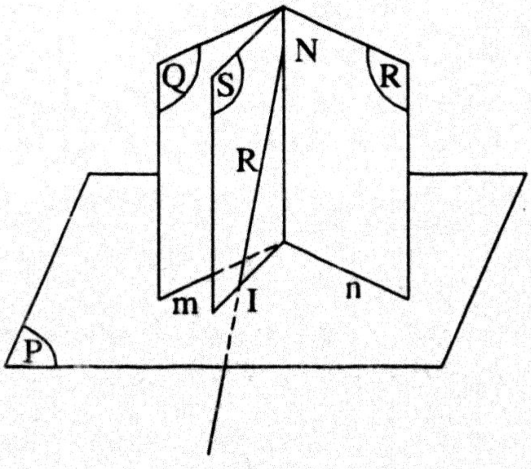
b) Qua câu a) ta thấy số cạnh bên của hình chóp bằng số cạnh đáy vì đáy có bao nhiêu đỉnh thì có bấy nhiêu cạnh đáy và cũng có từng ấy cạnh bên. Thành ra tổng số cạnh của hình chóp luôn luôn bằng số cạnh đáy nhân với 2, suy ra tổng số cạnh của hình chóp luôn luôn là *một số chẵn*.

c) Hình chóp có 18 cạnh thì số cạnh đáy là 9. (18 : 2 = 9) nên số mặt bên là 9 với một mặt đáy. Vậy hình 18 cạnh có 10 mặt.

434. Gọi mp (m, n) là P, mp (N, m) là Q, mp (N, n) là R.

Vì $O \in m$, $m \subset Q \Rightarrow O \in Q$; tương tự $O \in R$. Vậy $NO = Q \cap R$

Gọi mặt phẳng chứa p và O là S, do $N \in P$ nên $N \in S \Rightarrow NO \subset S$. Vì p và điểm O cố định nên S cố định. Vậy khi N chạy trên p thì NO chạy trên mp S cố định.

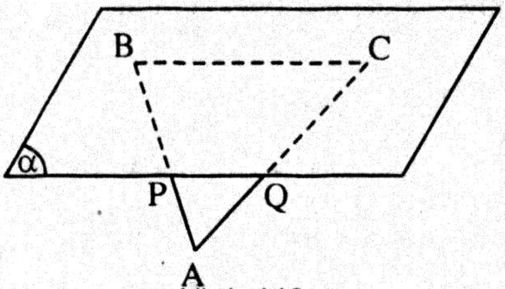


Hình 117

435. Giả sử có mp α song song với cạnh BC và cắt mp(ABC) theo giao tuyến PQ thì

$PQ // BC$; $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{3}{5}$ (gt)

$\Rightarrow \dfrac{PA}{AB} = \dfrac{PA}{PA+PB} = \dfrac{3}{5+3} = \dfrac{3}{8}$. (Hình 118)



Hình 118

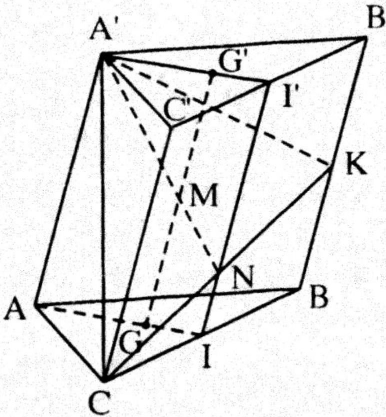
Theo Talet phẳng áp dụng vào ΔABC thì ta có $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{PA}{AB} = \dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow PQ = BC.\dfrac{3}{8} = 12.\dfrac{3}{8} = 4,5(cm)$.

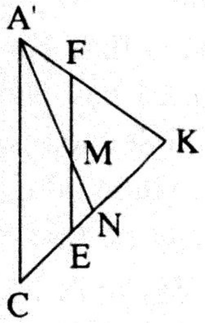
436. Kẻ các đường trung tuyến AI và A'I' thì G và G' thuộc các đường này. Trong mp AII'A', kẻ A'M cắt II' tại N, nó cũng là giao điểm của A'M và mp BB'C'C. Vì I là trung điểm BC mà II' // BB' nên N là trung điểm CK $\Rightarrow$ A'N là đường trung tuyến của ΔA'CK. Đường thẳng qua M và song song CA' cắt A'K, CK tại F, E, chúng chũng là các giao điểm của đường thẳng qua M, song song CA' cắt mp ABB'A' và mpBCC'B'.

Có $\frac{NE}{NC}=\frac{NM}{NA'}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KE}{KC}=\frac{KN+NE}{KC}=\frac{\frac{1}{2}KC+\frac{1}{3}NC}{KC}=\frac{\frac{1}{2}KC+\frac{1}{6}KC}{KC}=\frac{2}{3}$

Mà $\frac{EF}{A'C}=\frac{KE}{KC}=\frac{2}{3} \Rightarrow EF=\frac{2}{3}a.$



Hình 119

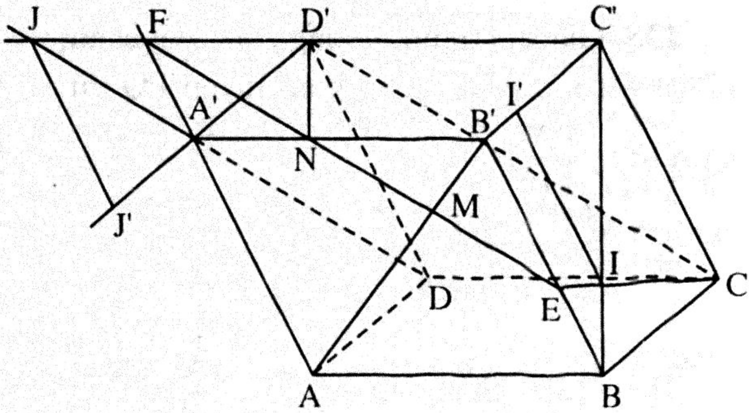


Hình 120

437. a) Mp ABB'A' // mp CDD'C' (tính chất hình hộp) nên mp MCD' cắt chúng theo hai giao tuyến song song : MN // CD'.

BC' cắt CE tại I, nó là giao điểm của BC' và mp MCD'.

MN và AA' cùng thuộc mp AA'B'B nên chúng cắt nhau tại F. D'F và DA' cùng thuộc mp AA'D'D nên chúng cắt nhau tại J.J $\in$ D'F mà D'F $\in$ mp MCD' nên J $\in$ mp MCD', J là giao điểm của DA' và mp MCD'.



Hình 121

Để chứng minh I, M, J thẳng hàng, ta phải chứng minh : $\frac{IE}{JF}=\frac{ME}{MF}$.

Thật vậy. Do BB' // CC' (tính chất hình hộp) nên : $\frac{IE}{IC}=\frac{BE}{CC'}$.

Đặt BE = x, CC' = a, suy ra :

IE = $\frac{x}{a}IC=\frac{x}{a}(CE-IE)=\frac{x}{a}(y-IE).$

Viết lại : $IE = \frac{x}{a}(y - IE) \Rightarrow IE = \frac{xy}{x+a}$.

Tương tự : $JF = \frac{xy}{a-x}$. Vậy : $\frac{IE}{JF} = \frac{a-x}{a+x}$ (1)

Vì BB' // AA' (tính chất hình hộp) nên $\frac{ME}{MF} = \frac{B'E}{AF}$, mà EF // A'B $\Rightarrow$ BE = A'F = x.

Vậy $\frac{ME}{MF} = \frac{a-x}{a+x}$ (2). Từ (1) và (2) cho đpcm.

b) Kẻ II' // BB', JJ' // AA'. Nếu trung điểm của IJ thuộc mp A'B'C'D' thì II' = JJ'.

Ta có : $\frac{II'}{BB'} = \frac{C'I}{C'B}$ (3). Nhưng $\frac{C'I}{IB} = \frac{CC'}{BE} = \frac{a}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{C'I}{C'I + IB} = \frac{a}{a+x} \Leftrightarrow \frac{C'I}{C'B} = \frac{a}{a+x}$$

Thay vào (3) cho $II' = \frac{a^2}{a+x}$.

Do JJ' // AA' // BB' nên $\frac{JJ'}{DD'} = \frac{JA'}{A'D}$ (4). Mà $\frac{JA'}{JD} = \frac{FA'}{DD'} = \frac{x}{a}$

$\Leftrightarrow \frac{JA'}{JD - JA'} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow \frac{JA'}{A'D} = \frac{x}{a-x}$. Thay vào (4) cho :

$$JJ' = \frac{ax}{a-x}.$$

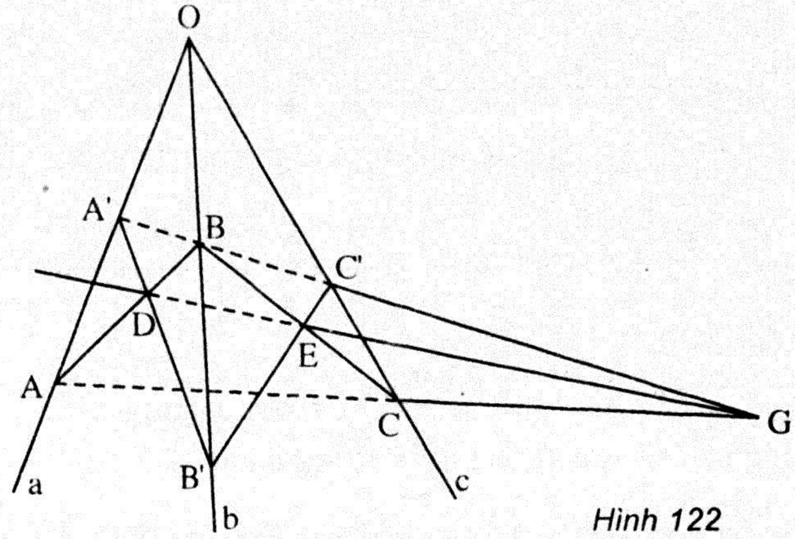
Ta phải có II' = JJ' $\Leftrightarrow \frac{a^2}{a+x} = \frac{ax}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + 2ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = a(\sqrt{2} - 1)$

Như vậy, vị trí điểm M được chọn như sau :

Gọi O là trung điểm AB'. Do ME // A'B (câu a) nên :

$$\frac{MB'}{MO} = \frac{B'E}{B'B} \Leftrightarrow \frac{MB'}{MO} = \frac{a-x}{a} = 2 - \sqrt{2}.$$

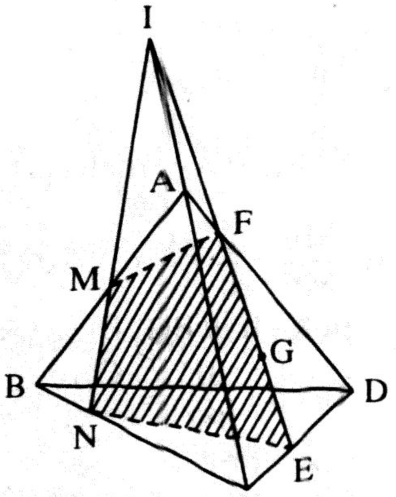
438. Muốn chứng minh D, E, G thẳng hàng ta phải chứng minh chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt. Ta có D ∈ AB mà AB ⊂ (ABC) ⇒ D ∈ mp(ABC). D ∈ A'B' mà A'B' ⊂ (A'B'C') ⇒ D ∈ mp(A'B'C') nên D là điểm chung của hai mp (ABC) và (A'B'C'). Cũng hứng minh tương tự hai điểm E, G cùng là điểm chung của hai mp (ABC) và



Hình 122

(A'B'C'). Vậy D, E, G phải nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) v
(A'B'C'), nên chúng thẳng hàng. (Hình 122)

439. a) MN và AC đều thuộc mp (ABC) chúng không song song vì M là trung điểm của AB và BN < NC (gt) nên MN và AC cắt nhau tại I. Do MN $\subset$ mp (MGN) ; I $\in$ MN $\Rightarrow$ I $\in$ mp (MGN) I $\in$ AC $\Rightarrow$ I $\in$ mp(ACD) $\Rightarrow$ I là một điểm chung của (MGN) và (ACD). Hiển nhiên G là điểm chung thứ hai của 2 mặt phẳng này, nên IG là giao tuyến của mặt phẳng (MGN) và mp (ACD).



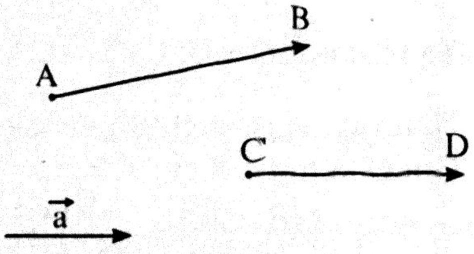
Hình 123

IG cắt AD tại F và cắt CD tại E. Vậy mặt phẳng (MGN) cắt mặt bên (ACD của tứ diện theo giao tuyến EF. Dễ dàng thấy mp (MGN) cắt mặt bên (ABC) the giao tuyến MF ; cắt mặt bên (ABC) theo giao tuyến MN và cắt mặt đáy (BCD) the giao tuyến NE. Do đó thiết diện là tứ giác phẳng MNEF.

b) Khi N là trung điểm của BC ta có MN là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow$ MN // AC, EF = (MGN) $\cap$ (ACD) $\Rightarrow$ MN // EF (tất nhiên EF chứa G) khi đó t giác MNEF là hình thang.

440. Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng. Chẳng hạn vectơ AB kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ (điểm đầu là A, điểm cuối là B)

Vectơ còn kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$,... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối.



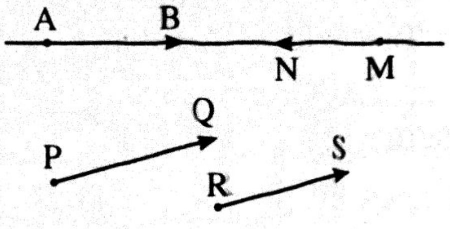
Hình 124

- Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chẳng hạn đường thẳng CD là giá của vectơ $\overrightarrow{CD}$ (Hình 124)

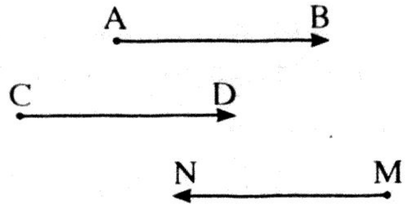
- Độ dài của một vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$ và $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của nó song song hoặc trùng nhau.



Hình 125

Chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ là những vectơ cùng phương (Hình 125)



Hình 126

- Hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{RS}$ là hai vectơ cùng hướng, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ là hai vectơ ngược hướng.

Như vậy hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

- Hai vectơ bằng nhau là hai vectơ cùng hướng và cùng độ dài

Chẳng hạn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

- Hai vectơ đối nhau là hai vectơ ngược hướng nhưng cùng độ dài

Chẳng hạn $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$.

- Một vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là vectơ không, kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$,...

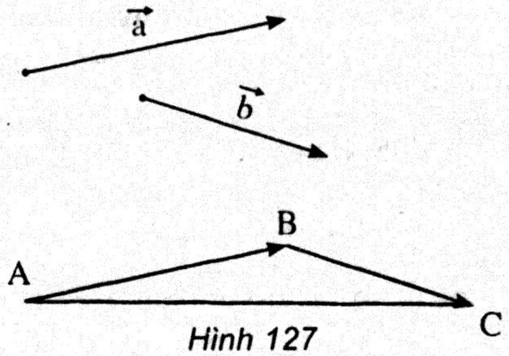
Người ta quy ước vectơ – không cùng phương cùng hướng với mọi vectơ và quy ước $|\overrightarrow{AA}| = 0$.

Người ta còn kí hiệu vectơ – không là $\vec{0}$, nên suy ra $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ ... (với mọi A, B)

441. Một số khái niệm về vectơ trong không gian như định nghĩa vectơ, giá của vectơ, độ dài của vectơ, vectơ bằng nhau, vectơ đối nhau, vectơ không cũng giống như những khái niệm về vectơ trong mặt phẳng (đã trình bày ở câu 1). Chẳng hạn định nghĩa : *"Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có định hướng*, nghĩa là đoạn thẳng đã được chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối"

442. Định nghĩa phép cộng vectơ. Cho hai vectơ trong không gian $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.



Hình 127

Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. (Hình 127)

Phép toán tìm tổng của hai vectơ gọi là *phép cộng vectơ*.

443. Phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau :

- Tính chất giao hoán : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vectơ $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

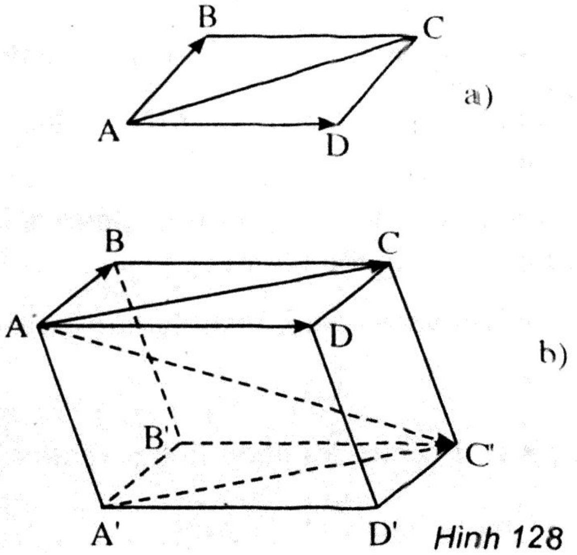
444. Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian ta có thể áp dụng ba quy tắc sau :

1) *Quy tắc ba điểm.* Cho 3 điểm A, B, C trong không gian ta luôn có

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2) *Quy tắc hình bình hành.* Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

3) *Quy tắc hình hộp*



Hình 128

Nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Hình 128).

445. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và số thực $k \neq 0$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

446. Tính chất của phép nhân véc tơ với một số : Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và với mọi số k, h, ta có :

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = hk\vec{a}$$

$$1.\vec{a} = \vec{a},\ (-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

447. Ba vectơ trong không gian được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

448. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi nó thoả mãn một trong các điều kiện sau

1) Từ một điểm O ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ Bốn điểm O, A, B, C đồng phẳng.

2) Một trong 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, là vectơ $\vec{0}$ ⇒ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

3) Nếu hai trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương ⇒ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

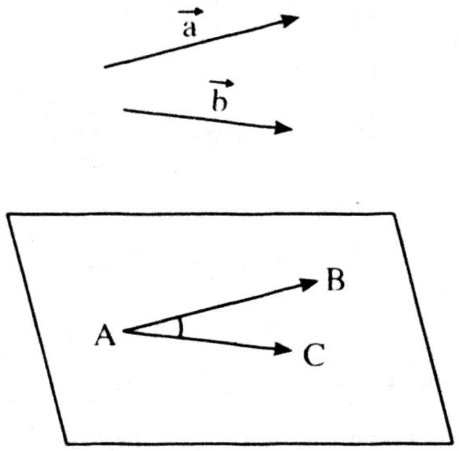
4) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Chú ý. Trong phần này ta cần chú ý một định lí quan trọng :

Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Với bất kì vectơ $\vec{x}$ nào trong không gian ta đều có một bộ ba số m, n, p duy nhất sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

449. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong không gian. Lấy điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

Ta gọi góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ trong mặt phẳng ABC là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $(\vec{a},\vec{b})$



Hình 129

450. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong không gian là một số kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ xác định bởi công thức

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

Tích vô hướng có ứng dụng sau :

- Tính độ dài của một đoạn thẳng: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$
- Xác định góc của hai vectơ: $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|}$

Đặc biệt khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ (hai giá của hai vectơ vuông góc với nhau)

Đây cũng là một phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

451. 1) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm cạnh AB và CD, ta có : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN})=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ G là trung điểm của MN.

Giả sử có G mà $\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}+\overrightarrow{G'D}=\vec{0}$.

Cũng làm tương tự ta có $\overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{G'N}=\vec{0} \Rightarrow$ G' là trung điểm của MN $\Rightarrow$ G' $\equiv$ G nên G là duy nhất

2) a) Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{A'A}=k\overrightarrow{A'B}$ $(k\neq 1)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA'}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA'})$$

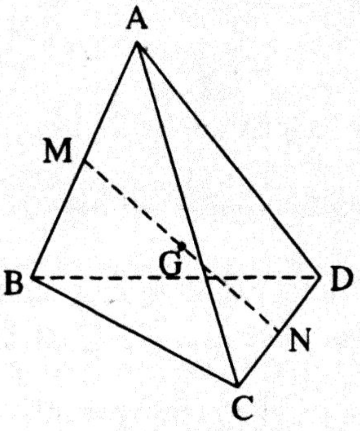
$$k\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}=\frac{k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{k-1}$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$\overrightarrow{OB'}=\frac{k\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}{k-1}$$

$$\overrightarrow{OC'}=\frac{k\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}}{k-1}$$



Hình 130

$$\overrightarrow{OD'} = \frac{k\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}}{k-1} \quad (1)$$

Do đó

$$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'} = \frac{k\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}}{k-1}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}.$$

b) A', B', C', D' đồng phẳng nên luôn có các số thực m, n, p với $m+n+p=1$ sao cho $\overrightarrow{OA'} = m\overrightarrow{OB'}+n\overrightarrow{OC'}+p\overrightarrow{OD'}$ (2)

Thay (1) vào (2) và chọn $O \equiv A$ ta có :

$$\frac{k\overrightarrow{AB}}{k-1} = m\frac{k\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}}{k-1}+n\frac{k\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}}{k-1}+p\frac{-\overrightarrow{AD}}{k-1}$$

$$\Leftrightarrow (k+m)\overrightarrow{AB}+(n-mk)\overrightarrow{AC}+(p-nk)\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

Ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng nên ta có

$$\begin{cases} k+m=0 \\ n-mk=0 \\ p-nk=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-k \\ n=-k^2 \\ p=-k^3 \end{cases}$$

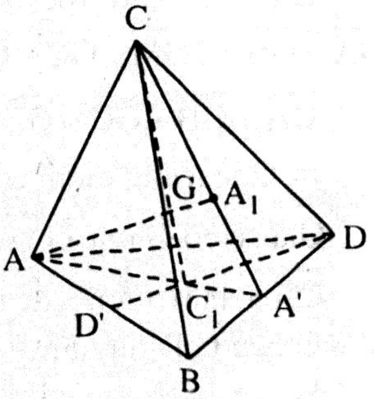
$$m+n+p=1 \Rightarrow -k-k^2-k^3=1 \Leftrightarrow -(1+k)(k^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow k=-1 \text{ (do } k^2+1>0).$$

452. a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$

$$=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC} \text{ (đpcm).}$$



Hình 131

b) Gọi C_1 là trọng tâm mặt ABD (đối diện với đỉnh C)

Do $\frac{C_1A}{C_1A'}=\frac{2}{1} \Rightarrow \overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA'}$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}).$$

c) Gọi A_1 là trọng tâm mặt BCD (đối diện với đỉnh A). Xét tam giác CAA'. Dễ dàng chứng minh được $\frac{GC}{GC_1}=\frac{GA}{GA_1}=\frac{3}{1}$. Muốn chứng minh G là trọng tâm của tứ diện ABCD ta cần chứng minh DD_1 và BB_1 cũng qua G (D_1, B_1 lần lượt là trọng tâm của mặt ABC, ACD).

Theo chứng minh ở câu a) ta có $\overrightarrow{DC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$ (1)

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CC_1}$$

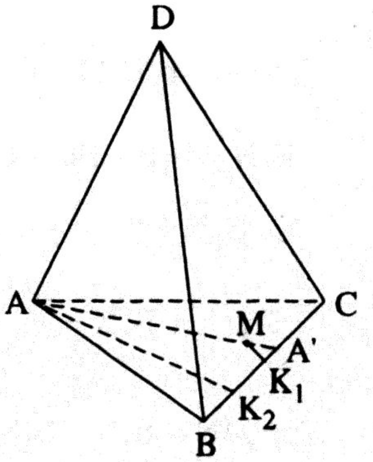
Mà $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \Rightarrow \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC})$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DD_1}$. Đẳng thức này chứng tỏ đường trọng tuyến DD_1 đi qua G và $\frac{GD}{GD_1} = \frac{3}{1}$.

Cũng chứng minh tương tự ta có : $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BB_1} \Rightarrow$ đường trọng tuyến BB_1 BB_1 đi qua G và $\frac{GB}{GB_1} = \frac{3}{1}$.

453. Tại A' là giao điểm của MA với BC. Từ M và A kẻ MK_1, AK_2 cùng vuông góc với BC (K_1, K_2 thuộc cạnh BC). Vậy ta có $MK_1 \parallel AK_2$ nên trong $\Delta A'AK_2$ ta có :



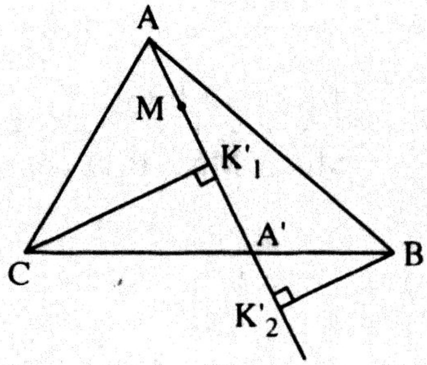
Hình 132

$$\frac{A'M}{A'A} = \frac{MK_1}{AK_2} = \frac{MK_1.BC}{AK_2.BC} = \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{ABC}}.$$

Phân tích $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DA'}$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}}\overrightarrow{DA} + \left(1 - \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}}\right)\overrightarrow{DA'} \quad (1)$$

Gọi K'_1, K'_2 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ C, B đến đường thẳng AM. $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BK'_2}{CK'_1} = \frac{BK'_2.AM}{CK'_1.AM} = \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}}$.



Hình 133

Phân tích vectơ $\overrightarrow{DA'}$ theo các vectơ $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$

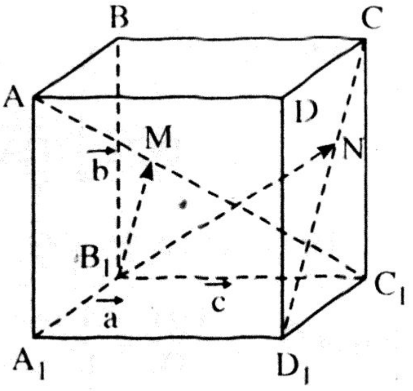
$$\overrightarrow{DA'} = \frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta AMC} + S_{AMB}}\overrightarrow{DB} + \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC}}.\overrightarrow{DC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overrightarrow{DM} = \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}}\overrightarrow{DA} + \left(1 - \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}}\right)\left(\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta AMC} + S_{\Delta AMB}}\overrightarrow{DB} + \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC}}\overrightarrow{DC}\right)$$

Chú ý rằng $1 - \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABC}}$

Vậy $\overrightarrow{DM} = \dfrac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta ABC}}.\overrightarrow{DA} + \dfrac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABC}}\overrightarrow{DB} + \dfrac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta ABC}}\overrightarrow{DC}$ (đpcm).



Hình 134

454. a) Điểm M chia trong đoạn thẳng AC_1 theo tỉ số m ta có $\dfrac{MA}{MC_1} = |m|$ hay

$\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MC_1}$

Tương tự điểm N chia trong đoạn thẳng CD_1 theo tỉ số n thì $\overrightarrow{NC} = n\overrightarrow{ND_1}$

$\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{b} - m\overrightarrow{MC_1}$

$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{B_1C_1} - \overrightarrow{B_1M} = \vec{c} - \overrightarrow{B_1M}$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1M} = \vec{a} + \vec{b} - m(\vec{c} - \overrightarrow{B_1M}) = \vec{a} + \vec{b} - m\vec{c} + m\overrightarrow{B_1M}$

$\Rightarrow (1 - m)\overrightarrow{B_1M} = \vec{a} + \vec{b} - m\vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{B_1M} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} - m\vec{c}}{1 - m}$

$\overrightarrow{B_1N} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \Rightarrow \overrightarrow{B_1N} = \vec{b} + \vec{c} - n\overrightarrow{ND_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1N} = \vec{b} + \vec{c} - n(\overrightarrow{B_1D_1} - \overrightarrow{B_1N}) = \vec{b} + \vec{c} - n(\vec{a} + \vec{c} - \overrightarrow{B_1N})$.

$\Rightarrow (1 - n)\overrightarrow{B_1N} = \vec{b} + \vec{c} - n\vec{a} - n\vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{B_1N} = \dfrac{\vec{b} - n\vec{a} + (1 - n)\vec{c}}{1 - n}$.

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{B_1N} - \overrightarrow{B_1M} = \dfrac{\vec{b} - n\vec{a} + (1 - n)\vec{c}}{1 - n} - \dfrac{\vec{a} + \vec{b} - m\vec{c}}{1 - m} =$

$$= -\left(\frac{n}{1 - n} + \frac{1}{1 - m}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1 - n} - \frac{1}{1 - m}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{m}{1 - m}\right)\vec{c}$$

$\overrightarrow{B_1D} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Muốn $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{B_1D}$ cộng tuyến $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{B_1D}$ $(k \in R)$

$$\Rightarrow -\left(\frac{n}{1 - n} + \frac{1}{1 - m}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1 - n} - \frac{1}{1 - m}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{m}{1 - m}\right)\vec{c} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{n}{1 - n} + \frac{1}{1 - m} + k\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1 - n} - \frac{1}{1 - m} - k\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{m}{1 - m} - k\right)\vec{c} = \vec{0}$$

Do 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên suy ra :

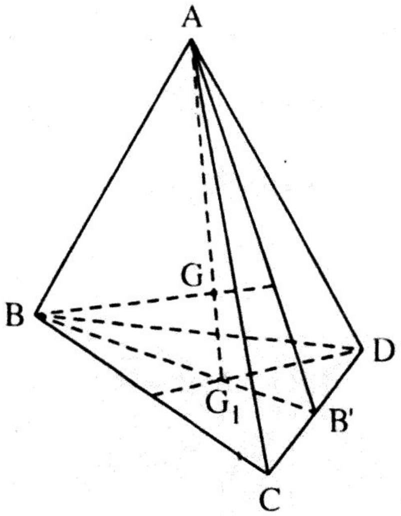
$$\begin{cases} \dfrac{n}{1 - n} + \dfrac{1}{1 - m} + k = 0 \\ \dfrac{1}{1 - n} - \dfrac{1}{1 - m} - k = 0 \\ 1 + \dfrac{m}{1 - m} - k = 0 \end{cases}$$

Suy ra $-\left(\frac{n}{1-n}+\frac{1}{1-m}\right)=\frac{1}{1-n}-\frac{1}{1-m}=\frac{1}{1-m}$

$\Rightarrow n=-1, m=-3.$

c) $\overrightarrow{MN}^2=\left(\frac{n}{1-n}+\frac{1}{1-m}\right)^2\vec{a}^2+\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{1-m}\right)^2\vec{b}^2+\left(\frac{1}{1-m}\right)^2\vec{c}^2$.

Vì $\vec{a}.\vec{b}=0,\ \ \vec{b}.\vec{c}=0,\ \ \vec{a}.\vec{c}=0$.



Hình 135

455. a) G_1 là trọng tâm của ΔBCD nên :

$$+\begin{array}{l}\overrightarrow{G_1B}=-2\overrightarrow{G_1B'}\ \text{(B' là trung điểm của CD)}\\ \overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=2\overrightarrow{G_1B'}\\ \hline \overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}.\end{array}$$

b) Từ kết quả bài 452, trọng tâm của tứ diện chia trọng tuyến theo tỉ số 3 : 1 kể từ đỉnh, nên ta có :

$\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{GG_1}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}&=-3\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1D}\\ &=\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}\ \text{(do kết quả câu a))}\end{aligned}$$

c) Từ giả thiết $3\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$

$$\Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}\right|=$$

$$=4\left|\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1D}\right|$$

$$\Leftrightarrow 3\left|4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right|=4\left|3\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}\right|$$

$\Leftrightarrow 3\left|4\overrightarrow{MG}\right|=4\left|3\overrightarrow{MG_1}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{MG_1}\right| \Leftrightarrow$ Điểm M cách đều hai điểm cố định G và $G_1 \Leftrightarrow \{M\}$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng GG_1.

456. Đặt các vectơ cơ sở :

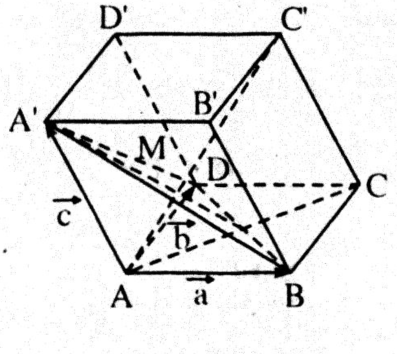
$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b},\ \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$

Ta có : $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}=\vec{a}-\vec{c}$,

$\overrightarrow{A'D}=\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AM}$. Đặt

$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC'}=x(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$



Hình 136

Do đó $\overrightarrow{A'M}=-\vec{c}+x(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=x\vec{a}+x\vec{b}+(x-1)\vec{c}$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{A'M} = m\overrightarrow{A'B} + n\overrightarrow{A'D} = m(\vec{a} - \vec{c}) + n(\vec{b} - \vec{c})$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x\vec{a} + x\vec{b} + (x - 1)\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} - (m + n)\vec{c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = m \\ x = n \\ x - 1 = -m - n \end{cases} \Rightarrow x = m = n = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'} \Rightarrow \frac{AM}{MC'} = \frac{1}{2}$$

457. Đặt các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ thì ta có :

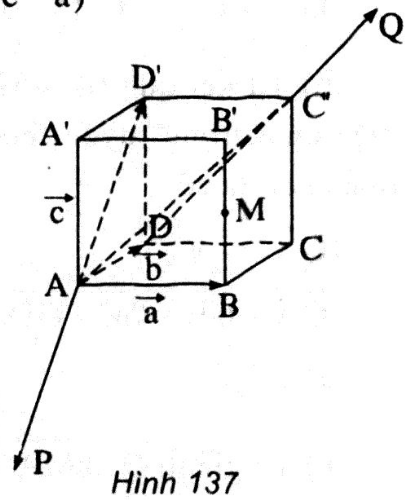
$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{a}\vec{b} = 0$, $\vec{a}\vec{c} = 0$, $\vec{b}\vec{c} = 0$.

a) Ta có : $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD'} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} \qquad (1)$$

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} - \overrightarrow{C'D} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} - (\vec{c} - \vec{a})$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} \qquad (2)$$



Hình 137

Từ (1) và (2) cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ (đpcm).

b) Từ câu a cho

$$\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PM} = 2\left(\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ}^2 = 4\left(\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\right)^2 = \ = 4\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \frac{9}{4}\vec{c}^2\right)$$

$$PQ^2 = 4\left(a^2 + a^2 + \frac{9}{4}a^2\right) =$$

$$= 17a^2 \Rightarrow PQ = a\sqrt{17}.$$

458. Theo đầu bài : $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0} \qquad (1)$

Đặt : $\overrightarrow{A'B} = p\overrightarrow{AA'}$ $(p \neq -1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AA'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (p + 1)\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{p + 1}\overrightarrow{AB}$. Tương tự : $\overrightarrow{B'C} = q\overrightarrow{BB'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{q + 1}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'D} = r\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{r + 1}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D'A} = s\overrightarrow{DD'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DD'} = \frac{1}{s + 1}\overrightarrow{DA}$, $(q, r, s \neq -1)$

Thay vào (1) ta được:

$$\frac{1}{p+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{q+1}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{r+1}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{s+1}\overrightarrow{DA} = \vec{0}\ (2)$$

Để ý đến : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, thay vào (2) ta thực hiện phép tính, được :

$$\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{r+1}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{s+1}\right)\overrightarrow{AD} = \vec{0}\ \ (3)$$

Nhưng vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \neq 0$, không đồng phẳng nên (3) cho :

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} = \frac{1}{q+1} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r+1} - \frac{1}{s+1} = 0 \Leftrightarrow p = q = r = s \text{ (đpcm).}$$

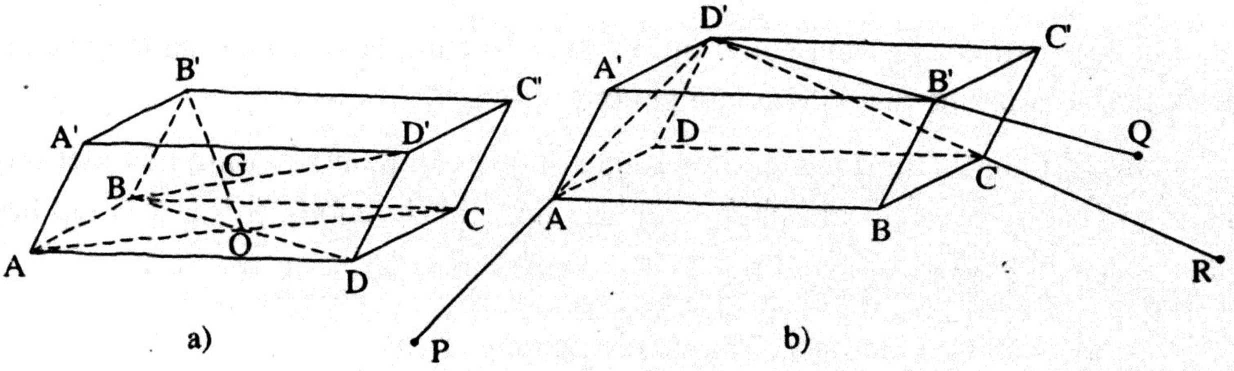
459. 1) Dễ thấy DB // = B'D'. Gọi O là giao hai đường chéo đáy thì B'O là một đường trung tuyến ΔAB'C. BD' cắt B'O tại G, chính là trọng tâm ΔAB'C vì có :

$$\frac{BO}{B'D'} = \frac{GO}{GB'} \Leftrightarrow \frac{GO}{GB'} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{GB}{GD'} = \frac{GO}{GB'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{GB}{BD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}.$$

2) Để chứng minh B là trọng tâm tứ diện PQRD', ta phải chứng minh $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$.

Đặt các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$



a)

b)

Hình 138

Ta có :

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\vec{a} - \overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} \qquad (1)$$

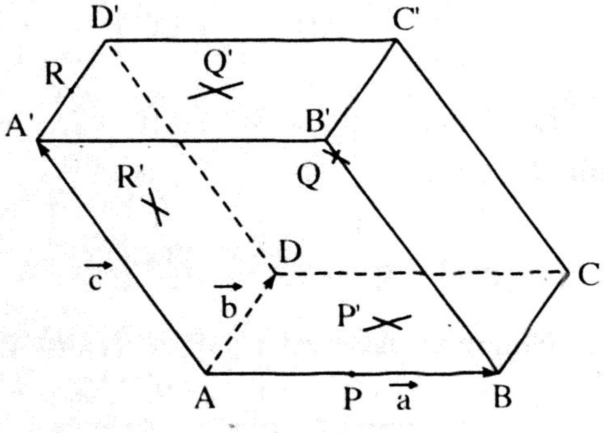
$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'Q} = \vec{c} + \overrightarrow{D'B'} = \vec{c} + \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{D'C'} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CR} = \vec{b} + \overrightarrow{D'C} = \vec{b} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} \qquad (4)$$

Cộng các đẳng thức (1), (2), (3), (4) được đpcm.

460. a) Đặt các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Ta có



Hình 139

$\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2}\vec{b}$ (1)

$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QC'} + \overrightarrow{C'Q'} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'A'} =$

$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ (2)

$\overrightarrow{RR'} = -\frac{1}{2}\vec{c}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) được đpcm.

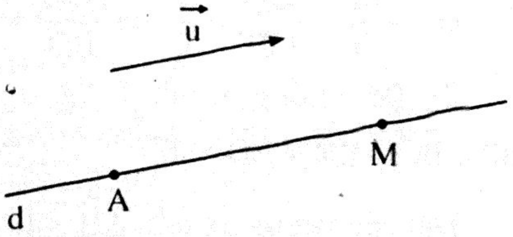
b) Gọi G là trọng tâm ΔPQR. Từ đẳng thức câu a, ta có :

$\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{RG} + \overrightarrow{GR'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR}) + \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GP'} + \overrightarrow{GQ'} + \overrightarrow{GR'} = \vec{0}$. Đẳng thức này chứng tỏ G là trọng tâm của ΔP'Q'R'.

461. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với d.



Hình 140

462. Các tính chất của $\vec{u}$

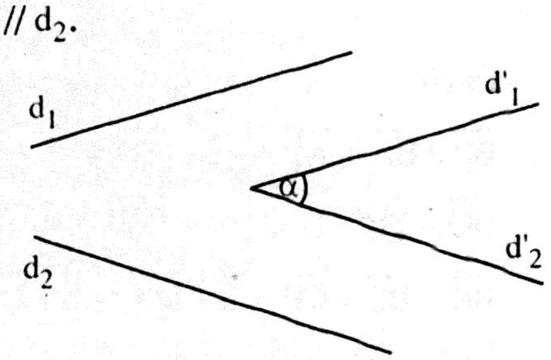
- $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cùng là vectơ chỉ phương của d, các vectơ chỉ phương của d đều cùng phương.

- Một đường thẳng d trong không gian được hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của nó. Khi đó đường thẳng d là tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. $(t \in \mathbb{R})$.

- d_1, d_2 phân biệt lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương $\Leftrightarrow d_1 \,//\, d_2$.

463. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau d_1' và d_2' lần lượt song song với d_1 và d_2 được kí hiệu là $(\widehat{d_1, d_2})$. Nếu $(\widehat{d_1', d_2'}) = \alpha$ thì $(d_1, d_2) = \alpha$.



Hình 141

Chú ý : • Để xác định góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2, ta có thể lấy điểm O trên d_1 rồi từ O vẽ $d'_2 // d_2$.

• nếu $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2 và $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng α nếu $\alpha \le 90^o$ và bằng $180^o - \alpha$ nếu $\alpha > 90^o$.

464. Hai đường thẳng d_1, d_2 được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^o.

d_1, d_2 vuông góc với nhau kí hiệu là $d_1 \perp d_2$.

Chú ý : • $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$

• Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì phải vuông góc với đường kia.

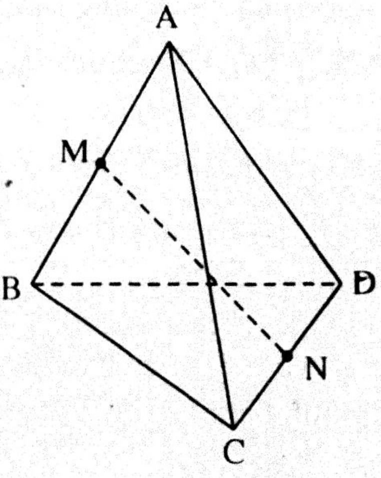
465. a) Dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a^2 + a^2 - 2a^2\cos 60^o + 2a^2\cos 60^o - 2a^2\cos 60^o)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Hình 142

b) $\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{BC}|} =$

$$|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{BC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}}{2}.\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} +}{2}$$

$$= \frac{-a^2\cos 60^o + a^2\cos 60^o + a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = 45^o.$$

c) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}}{2}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}{2}$

$$= \frac{a^2\cos 60^o - a^2\cos 60^o}{2} = 0 \Rightarrow MN \perp AB$$

Cũng chứng minh tương tự ta có MN $\perp$ CD.

d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$$

$$= (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = a^2\cos 60^o - a^2\cos 60^o = 0$$

$\Rightarrow$ AB $\perp$ CD.

Cũng chứng minh tương tự AC $\perp$ BD, AD $\perp$ BC.

466. a)

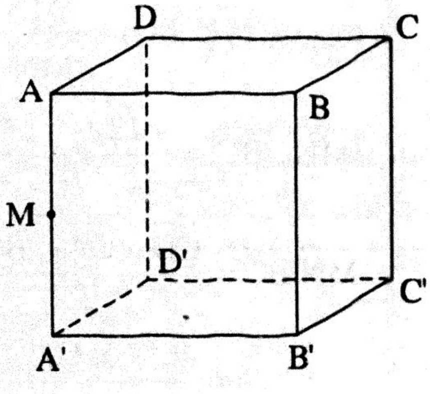
$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} \\ + & \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} \\ & \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} \\ \hline & \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \quad \vec{0} \end{array}$$

b) Nếu $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ và AB $\perp$ DC $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 0$ kết hợp với (*) ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow$ BC $\perp$ AD.

467. a) Ta có thể tính góc của hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' bằng hai cách :

Cách thứ nhất.

Góc của hai đường thẳng AB' và BC' chính là góc của đường thẳng AB' và AD' vì AD' // BC'. Đó chính là góc $\widehat{D'AB'}$. Dễ dàng chứng minh ΔAD'B' là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{D'AB'} = 60^o$.



Hình 143

Cách thứ hai. Giả sử độ dài cạnh của hình lập phương là m và đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{c}$ (quy tắc hình bình hành)

$$\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}|.|\overrightarrow{BC'}|}$$

mà $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}.\vec{c}$

Ta lại có $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đôi một vuông góc với nhau nên $\vec{a}\vec{c} = 0$, $\vec{a}.\vec{b} = 0$, $\vec{b}.\vec{c} = 0$.

Nên $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = \vec{a}^2 = m^2$

$|\overrightarrow{AB'}| = m\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BC'}| = m\sqrt{2}$. Vậy $\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \dfrac{m^2}{m\sqrt{2}.m\sqrt{2}} = \dfrac{m^2}{2m^2} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = 60^o$. Do đó góc của hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' bằng 60^o (do góc của hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng nhỏ hơn 90^o).

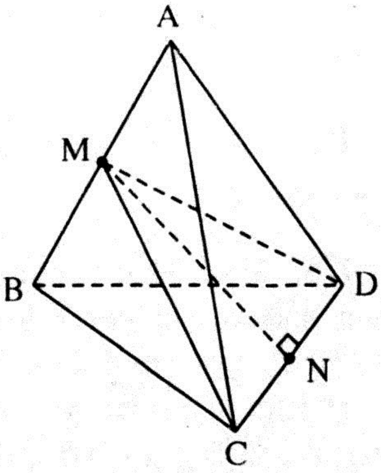
b) Ta có $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

$$\cos(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BC'}||\overrightarrow{BM}|}$$

$$\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{BM} = (\vec{a} + \vec{c})\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}^2 = \frac{1}{2}m^2$$

$$|\overrightarrow{BC'}| = m\sqrt{2},\ |\overrightarrow{BM}| = \frac{m\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\frac{1}{2}m^2}{m^2\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$



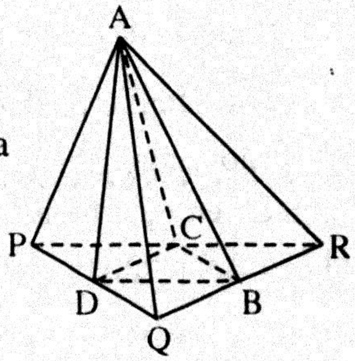
Hình 144

468. Cách 1. Xem bài 465a)

Cách 2. Vì ABCD là tứ diện đều cạnh a nên các đường trung tuyến $CM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ ΔCMD là tam giác cân đỉnh M $\Rightarrow MN \perp CD$ (Hình 144)

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông MND

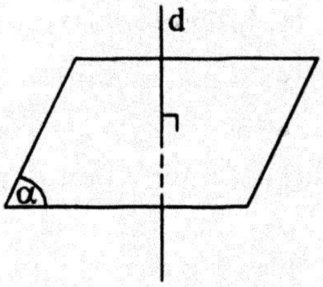
Ta có : $MN^2 = MD^2 - ND^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Hình 145

469. Từ gt cho $BC \mathbin{/\!/} = \frac{1}{2}PQ \Rightarrow AD = BC = PD = DQ$, nên ΔAPQ có đường trung tuyến thuộc cạnh thứ ba bằng nửa cạnh thứ ba $\Rightarrow \Delta QPQ$ có $A = 1v \Rightarrow AP \perp AQ$.

Chứng minh tương tự : $AQ \perp AR$, $AR \perp AP$ (đpcm).



Hình 146

470. 1) Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng α nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng α. Kí hiệu là $d \perp \alpha$ hay $\alpha \perp d$.

2) *Định lí 1.* Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng m, n cắt nhau của mặt phẳng α thì d vuông góc với α.

$$GT\begin{cases} m \cap n \\ \alpha(m,n) \\ d \perp m, d \perp n \end{cases} \qquad KL\{d \perp \alpha.$$

471. Nếu mặt phẳng α xác định bởi hai đường thẳng m, n cắt nhau và $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng này. Khi đó ta kí hiệu và gọi tập hợp $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặp phẳng α.

Từ điều đó suy ra tính chất sau :

- $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ là cặp vectơ chỉ phương của mp α thì $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương.
- Một mặt phẳng α có vô số cặp vectơ chỉ phương. Nếu $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ là một cặp vectơ chỉ phương thì mỗi vectơ đó có giá song song với α hoặc nằm trong α.

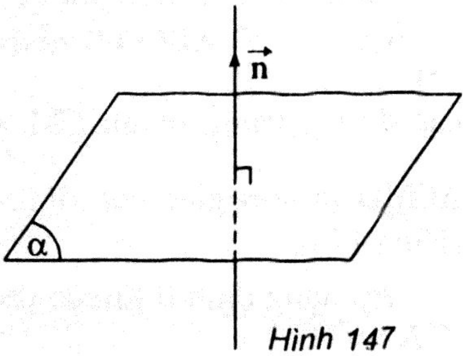
Định lí 2. Mặt phẳng α hoàn toàn được xác định nếu biết điểm O và cặp vectơ chỉ phương $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

472. Một vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng α nếu giá của nó vuông góc với α.

473. 1) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cùng vuông góc với đường thẳng kia.

2) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

3) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Hình 147

4) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Người ta đã chứng minh được các tính chất này và có thể vận dụng để giải toán

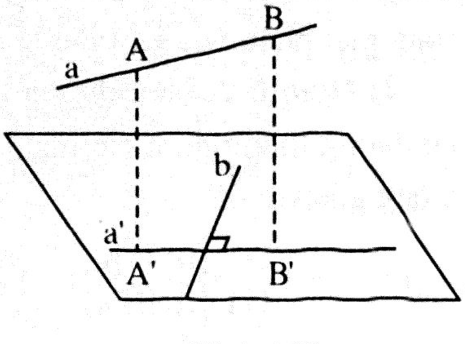
474. Định lí ba đường vuông góc :

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng α và đường thẳng a' là hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng α, khi đó đường thẳng b thuộc mặt phẳng α vuông góc với a khi và chỉ khi b vuông góc với a'.

$$\text{GT}\begin{cases} a \not\perp \alpha \\ a' \text{ là hình chiếu của a trên } \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases} \quad \text{KL}\{b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'.$$

Chứng minh

- Nếu $a \subset \alpha$ thì $a' \equiv a$ nên $b \perp a' \Leftrightarrow b \perp a$.
- Nếu $a \not\subset \alpha$, lấy A, B thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc mp α. Từ A và B kẻ $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha \Rightarrow AA' \,//\, BB'$. Gọi giao tuyến của mp(AA', a) và α là a' thì a' là hình chiếu của a trên mp α. Vì $b \subset \alpha \Rightarrow AA' \perp b$. Vậy nếu $b \perp a$ thì $b \perp (a, AA') \Rightarrow b \perp a'$.



Hình 148

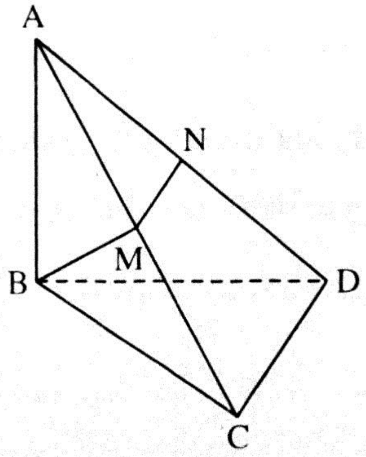
Ngược lại nếu $b \perp a'$ thì $b \perp (a, AA') \Rightarrow b \perp a$

(mặt phẳng (a, AA') là mặt phẳng được xác định duy nhất, ta sẽ biết rõ điều này sau).

475. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng là góc tạo bởi đường thẳng đó và là hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

Góc của đường thẳng d và mặt phẳng α được kí hiệu là $(\widehat{d,\alpha})$

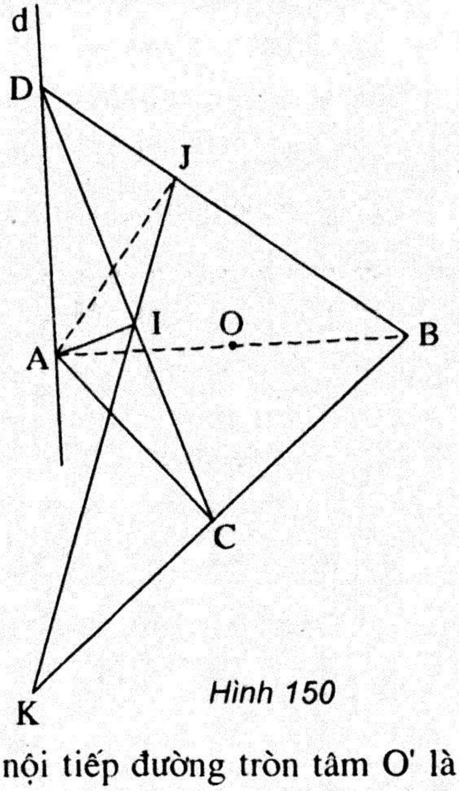
- Nếu $d \perp \alpha$, ta quy ước $(\widehat{d,\alpha}) = 90^o$
- Nếu $d \, // \, \alpha$ hay $d \subset \alpha$ thì ta quy ước $(\widehat{d,\alpha}) = 0^o$
- Nếu d không vuông góc với α, ta có $(\widehat{d,\alpha}) = (d, d')$ (d' là hình chiếu của d trên α).



Hình 149

476. a) Do $AB \perp mp\,(BCD) \Rightarrow AB \perp CD$
từ gt $\Rightarrow BC \perp CD$
$\Rightarrow CD \perp mp\,(ABC)$.
b) ΔABC cân đỉnh B nên $BM \perp AC$
Do $CD \perp mp\,(ABC) \Rightarrow CD \perp BM$
$\Rightarrow BM \perp mp\,(ACD)$.

c) Vì MN là đường trung bình của ΔACD nên $MN \, // \, CD$. Mà $CD \perp mp\,(ABC) \Rightarrow MN \perp mp\,(ABC.)$



Hình 150

477. a) $AD \perp mp\,(ABC) \Rightarrow AD \perp BC$
gt $\Rightarrow AC \perp BC$ (Hình 150)
$\Rightarrow BC \perp mp\,(ACD) \Rightarrow BC \perp AI$ (vì $AI \in mp\,(ACD)$). (1)
Đầu bài cho $AI \perp CD$ (2)
Từ (1) và (2) cho $AI \perp mp\,(BCD)$ (Hình 150).
Vì $AI \perp mp\,(BCD) \Rightarrow AI \perp BD$
gt $\Rightarrow AJ \perp BD$
$\Rightarrow BD \perp mp\,(AIJ)$
b) Do $BC \perp mp\,(ACD)$
$\Rightarrow BC \perp CD \Rightarrow \widehat{BCD} = 1v$
Do $BD \perp mp\,(AIJ) \Rightarrow BD \perp IJ \Rightarrow \widehat{BJI} = 1v$.

Tứ giác BCIJ có tổng hai góc đối bằng 2v nên nội tiếp đường tròn tâm O' là trung điểm BI. OO' là đường trung bình của ΔBAI nên $OO' \, // \, AI$. Mà $AI \perp mp$ $BCD \Rightarrow OO' \perp mp\,BCD$.

c, d, e) Bạn đọc tự làm.

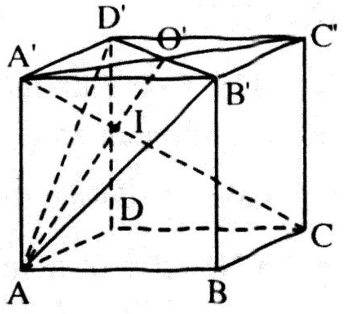
478. a) Theo tính chất hình vuông thì $A'C' \perp B'D'$ (1)

Theo tính chất hình lập phương : $AA' \perp$ mp $(A'B'C'D')$

$\Rightarrow AA' \perp B'D'$ (2)

Từ (1) và (2) cho $B'D' \perp$ mp $(AA'C'C)$

$\Rightarrow B'D' \perp A'C$. (3)



Hình 151

Chứng minh tương tự : $A'B \perp AB'$ vì $ABB'A'$ là hình vuông (4)

$BC \perp$ mp $(ABB'A')$ (tính chất hình lập phương)

$\Rightarrow BC \perp AB'$ (5)

Từ (4) và (5) cho $AB' \perp$ mp $(A'BCD') \Rightarrow AB' \perp A'C$ (6)

Từ (3) và (6) cho $A'C \perp$ mp $(AB'D')$.

b) I là trọng tâm $\Delta AB'D'$. Vì $\Delta AB'D'$ là tam giác đều, cạnh $a\sqrt{2}$ mà AO' là đường trung tuyến, cũng là đường cao của nó : $AO' = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Trong tam giác đều : các đường chủ yếu trùng nhau nên I cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta AB'D'$, bán kính $IA = \frac{2}{3}AO' = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

479. a) Do $d \perp$ mp $(ABC) \Rightarrow MA \perp BK$.

gt $\Rightarrow CA \perp BK$

$\Rightarrow BK \perp$ mp $(CAM) \Rightarrow BK \perp CM$.

gt $\Rightarrow BH \perp CM$

$\Rightarrow CM \perp$ mp (BKH)

$\Rightarrow CM \perp BN$ vì $BN \subset$ mp (BKH) (Hình 152).

b) Do $CM \perp$ mp $(BKH) \Rightarrow CM \perp KH$

gt $\Rightarrow CA \perp d$

$\Rightarrow$ K là trực tâm ΔMNC

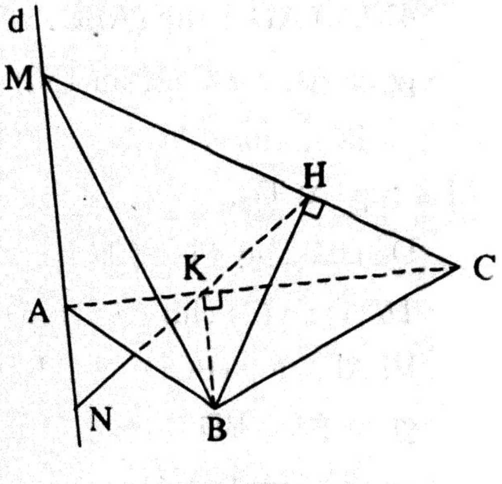
$\Rightarrow MK \perp CN$ (1)

Do $BK \perp$ mp (CAM) (cmt)

$\Rightarrow BK \perp CN$ (2)

Từ (1) và (2) cho $CN \perp$ mp (BKM)

$\Rightarrow CN \perp BM$ (đpcm) .



Hình 152

c) Dễ nhận thấy $\Delta MAK \backsim \Delta CAN$ vì chúng là tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau $\widehat{AMK} = \widehat{ACN}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) cho : $\frac{AM}{AK} = \frac{AC}{AN} \Leftrightarrow$ .AN = AK.AC không đổi. Như vậy khi M chạy trên d thì tích AM.AN không đổi nên tổng AM + AN = MN nhỏ nhất khi và chỉ khi AM = AN $\Rightarrow$ $AM^2 = AK.AC$.

Đẳng thức này chứng tỏ MA là đường cao của tam giác vuông CMK' (K' là điểm đối xứng của K qua A), vuông góc ở M.

480. a) Có $\widehat{AKB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AK \perp KB$. Do $SA \perp$ mp P $\Rightarrow SA \perp KB$

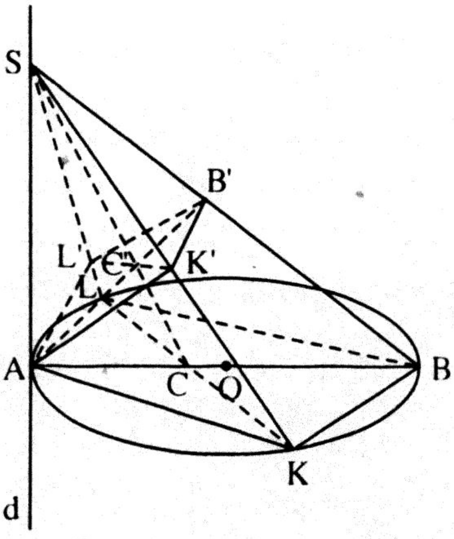
$\Rightarrow KB \perp$ mp SAK $\Rightarrow KB \perp AK'$ vì $AK' \subset$ mp SAK

Vì $SB \perp$ mp P $\Rightarrow SB \perp AK'$ vì $AK' \subset$ mp P

$\Rightarrow AK' \perp$ mp SKB $\Rightarrow AK' \perp K'B'$

vì $K'B' \in$ mp SKB $\Rightarrow \widehat{AK'B'} = 1v$

Chứng minh tương tự : $\widehat{AL'B'} = 1v$ (Hình 153)



Hình 153

Như vậy K', L' cùng nhìn AB' dưới một góc vuông nên tứ giác này nội tiếp được đường tròn đường kính AB', tâm O' là trung điểm AB'.

b) Để ý rằng do $AK' \perp$ mp SKB $\Rightarrow AK' \perp SK$. Tương tự ta cũng có $AL \perp SL$.

K'L' là một dây cung của đường tròn (O'), nó cắt đường kính AB' tại C'. C' chỉ có thể là trung điểm của K'L' nếu xảy ra một trong hai trường hợp sau :

– *hoặc đường kính AB' vuông góc với dây cung K'L'* $\Rightarrow \Delta AK'L'$ cân đỉnh A $\Rightarrow AK' = AL' \Rightarrow$ tam giác vuông SK'A = tam giác vuông SL'A $\Rightarrow \widehat{ASK'} = \widehat{ASL'} \Rightarrow$ tam giác vuông SAK = tam giác vuông SAL $\Rightarrow AK = AL \Rightarrow KL \perp AB$.

Ngược lại, nếu $KL \perp AB \Rightarrow AK = AL \Rightarrow SK = SL \Rightarrow AK' = AL' \Rightarrow K'L' \perp AB' \Rightarrow$ C' là trung điểm K'L'.

– *hoặc C' là trung điểm của AB'* $\Rightarrow C' \equiv O'$. Trong ΔSAB, kẻ B'I // SC (hình 154). Vì C' là trung điểm AB' nên C là trung điểm AI và có AC = CI = x. Ta có :

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{CI}{CB} = \frac{x}{2R - x} \ (*). \text{ Ta cũng có : } \frac{SB'}{SB} = \frac{SB'.SB}{SB^2}.$$

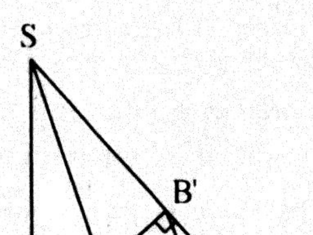
Trong tam giác vuông SAB cho : $SA^2 = SB'.SB$, và $SA^2 = SB^2 - AB^2 \Rightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = h^2 + 4R^2$. Do đó :

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{h^2}{h^2 + 4R^2}$$

Suy ra từ (*) :

$$\frac{h^2}{h^2 + 4R^2} = \frac{x}{2R - x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{Rh^2}{h^2 + 2R^2} \text{ và } KL \perp AB.$$



Hình 154

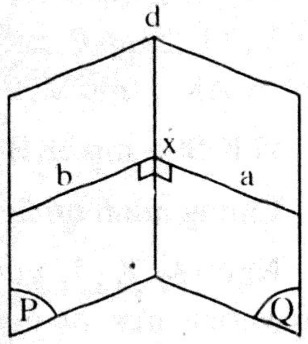
Ngược lại, nếu x nhận giá trị trên, ta dễ dạng suy ra C' là trung điểm AB'.

c) AK'B'L' là hình vuông $\Leftrightarrow$ $K'L' = AB'$ và $K'L' \perp AB'$ tại O'. Nó chính là trường hợp trên nghĩa là $x = \dfrac{Rh^2}{h^2 + 2R^2}$ và $KL \perp AB$.

481. 1) Góc giữa hai mặt phẳng là góc tạo bởi hai đường thẳng nằm trên hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó tại một điểm bất kì của giao tuyến.

Chẳng hạn trên (Hình 155) góc giữa hai mặt phẳng P, Q là góc giữa hai đường thẳng a, b

Như vậy góc giữa hai mặt phẳng không lớn hơn 90^0 và được kí hiệu $(\widehat{P,Q})$.



Hình 155

Nếu P // Q hoặc $P \equiv Q$ thì $(\widehat{P,Q}) = 0^0$.

Vậy $0 \le (\widehat{P,Q}) \le 90^0$.

2) Nếu $(\widehat{P,Q}) = 90^0$ ta nói rằng P vuông góc với Q và kí hiệu là $P \perp Q$ hay $Q \perp P$.

482. *Định lí 1.*

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Các hệ quả

Hệ quả 1. Giả sử hai mặt phẳng P và Q lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$. Khi đó $P \perp Q \Leftrightarrow \vec{n}_P . \vec{n}_Q = 0$.

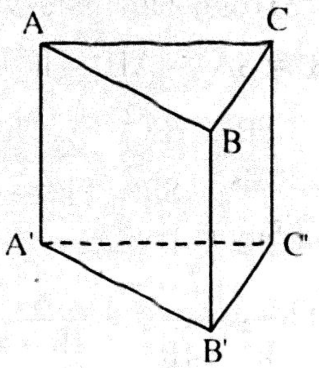
Hệ quả 2. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 3. Nếu hai mặt phẳng P, Q vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng d đi qua một điểm A của mặt phẳng P và d vuông góc với Q thì d nằm trong P.

483. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy, độ dài cạnh bên, gọi là chiều cao của lăng trụ (ở hình 156) ABC.A'B'C' gọi là hình lăng trụ đứng tam giác)

- Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều gọi là hình lăng trụ đều.

- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.



Hình 156

- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông có mặt bên đều là hình vuông gọi là hình lập phương.

484. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều có chân đường cao H trùng với tâm O của đáy. (Đường cao của hình chóp có đỉnh là S là đoạn thẳng SH mà H là hình chiếu của S trên đáy)

Người ta còn nói hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

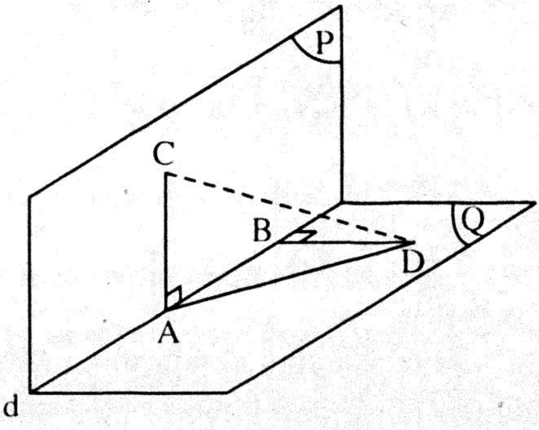
- Phần của hình chóp nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp đó là hình chóp cụt. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên là hình chóp cụt đều.

485. BD ⊥ d, B ∈ d ⇒ ΔABD vuông tại B. Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông ABD trong mặt phẳng Q ta có

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

$$AD = 2\sqrt{10}\ \text{(cm)}$$



Hình 157

Theo giả thiết AC ⊥ d và P ⊥ Q theo hệ quả 2 ta có AC ⊥ Q mà AD ⊂ Q ⇒ AC ⊥ AD ⇒ ΔACD vuông tại A

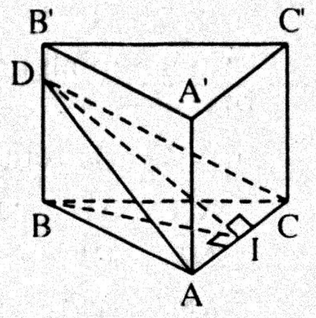
Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông ACD ta có

$$CD^2 = AD^2 + AC^2$$

$$CD^2 = 40 + 9 = 49$$

$$CD = \sqrt{49} = 7\ \text{(cm)}.$$

486. Kẻ BI ⊥ AC thì I là trung điểm AC. BI là hình chiếu của DI trên đáy nên DI ⊥ AC theo định lí ba đường vuông góc ⇒ $\widehat{DIB}$ là góc phẳng tạo bởi thiết diện và đáy ⇒ $\widehat{DIB} = 30^\circ$ (Hình 158).



Hình 158

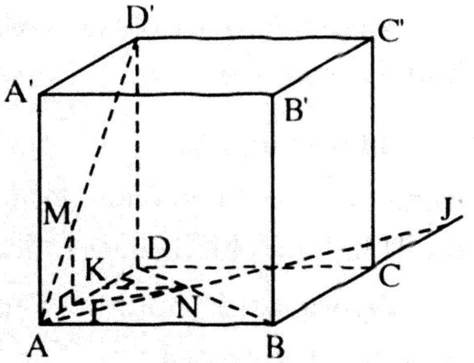
Tam giác vuông DBI cho BD = BItan30°

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông BAI cho

$$BI^2 = AB^2 - AI^2 = 48 \Rightarrow BI = 4\sqrt{3}.\ \text{Vậy}\ BD = 4\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = 4.$$

$$\text{dt}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}AC.BI = 4\sqrt{3},\ \ \text{dt}\Delta ACD = \frac{\text{dt}\,\Delta ABC}{\cos 30^\circ} = 8.$$

487. a) Nghĩa là ta phải chứng minh MN ngắn nhất khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Muốn vậy, ta phải tính MN theo a và x.



Hình 159

Kẻ MI ⊥ AD thì MI ⊥ mp ABCD

$\Rightarrow$ MI ⊥ IN $\Rightarrow$ ΔMIN là tam giác vuông.

ΔMAI là tam giác vuông cân ($\widehat{MAI} = 45^o$),

$$MA = AI\sqrt{2} \Leftrightarrow x = AI\sqrt{2} \Leftrightarrow AI = \frac{x\sqrt{2}}{2} = MI.$$

Kẻ NK ⊥ AD thì NK ⊥ mp ADD'A'. Tương tự có $NK = KD = \frac{x\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ $KI = AD - 2AI = a - x\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí Pitago vào các tam giác vuông KIN và MIN cho

$$NI^2 = KI^2 + KN^2 = (a - x\sqrt{2})^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{ và } MN^2 = MI^2 + NI^2 = 3x^2 - 2a\sqrt{2}x + a^2.$$

MN^2 là hàm bậc hai (biến x) có hệ số x^2 là số dương nên có cực tiểu với $x = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ MN ngắn nhất với $x = \frac{1}{3}BD$.

b) α) Ta phải chứng minh MN ⊥ AD' và MN ⊥ BD $\Leftrightarrow \widehat{AMN} = 1v$. Muốn vậy, dùng định lí đảo Pitago : phải chứng tỏ $NA^2 = MA^2 + MN^2$. Áp dụng định lí hàm cosin vào ΔDAN :

$$NA^2 = DA^2 + DN^2 - 2DA.DN\cos 45^o = a^2 + x^2 - \sqrt{2}ax = \frac{5}{9}a^2.$$

Mà $MA^2 + MN^2 = x^2 + 3x^2 - 2a\sqrt{2}x + a^2 = \frac{5}{9}a^2$.

$\Rightarrow \widehat{AMN} = 1v$ (đpcm).

Chứng minh tương tự : MN ⊥ BD. Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD.

β) Do AD // BC nên theo định lí Talet :

$\frac{AN}{NJ} = \frac{AD}{BJ} = \frac{DN}{NB} = \frac{1}{2}$ (vì $DN = x = \frac{1}{3}BD$) $\Rightarrow$

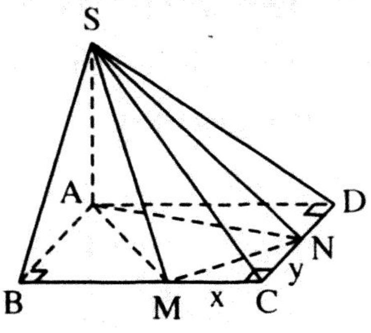
$\frac{AN}{NJ} = \frac{AM}{MD'}$ $\left(\text{vì } \frac{AM}{MD'} = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ MN // D'J (theo định lí đảo Talet) (1)

và $\frac{AD}{BJ} = \frac{1}{2} \Rightarrow BJ = 2AD = 2a \Rightarrow CJ = a \Rightarrow$ CJ // = A'D' $\Rightarrow$ A'D'JC là hình bình hành $\Rightarrow$ A'C // D'J (2)

Từ (1) và (2) cho MN // A'C.

c) A'C ⊂ mp A'BCD' mà MN // A'C $\Rightarrow$ MN // mp A'BCD'.

488. a) Do $SA \perp mp\ ABCD \Rightarrow SA \perp AM$ và $SA \perp AN \Rightarrow \widehat{MAN}$ là góc phẳng nhị diện (M, SA, N). Ta phải tìm mối liên hệ x, y sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$. Áp dụng định lí hàm cosin vào ΔNAM cho $MN^2 = NA^2 + MA^2 - 2NA.MA.\cos 45^o$. (*) Áp dụng định lí Pitago vào các tam giác vuông BAM, DAN, MCN cho $MA^2 = a^2 + (a - x)^2$, $NA^2 = a^2 + (a - y)^2$, $MN^2 = x^2 + y^2$.



Hình 160

Thay chúng vào (*) và thực hiện phép tính, được hệ thức liên hệ x, y, a :

$$(xy)^2 + 2a(x + y)(2a^3 - xy) = 4a^4.$$

b) Ta nhận thấy muốn mp $SMN \perp$ mp SAM thì mp SMN phải chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng SAM ; và đây là một bài toán quen thuộc với ΔNAM vuông ở M. Thật vậy, nếu ΔNAM vuông ở M thì ta thấy : do $SA \perp mp\ ABCD \Rightarrow SA \perp MN$

$$MA \perp MN \Rightarrow MN \perp mp\ SAM \Rightarrow mp\ SMN \perp mp\ SAM.$$

Theo định lí đảo Pitago, ta phải có : $NA^2 = MA^2 + MN^2$.

Câu a đã tính theo a, x, thay vào biến đổi được :

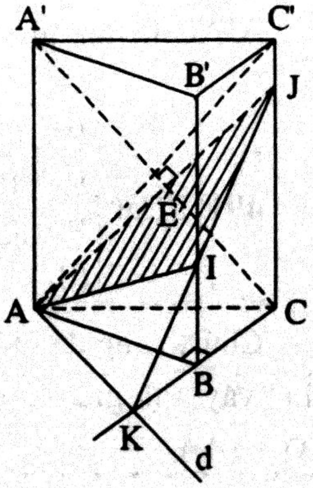
$$a = \frac{x^2}{x - y} \quad (x \neq y)$$

489. Mp P qua A, vuông góc CA' nên cắt mp AA'C'C theo giao tuyến $AJ \perp CA'$. Mp P cắt mp ABC theo giao tuyến d chẳng hạn, thì ta nhận thấy :

do $AA' \perp mp\ ABC \Rightarrow AA' \perp d$, $CA' \perp P \Rightarrow CA' \perp d\ (\subset P)$

$\Rightarrow d \perp mp\ AA'C'C \Rightarrow d \perp AC$.

Vậy từ A và trong mp ABC ta kẻ đường thẳng d vuông góc AC, cắt BC tại K. KJ cắt BB' tại I. Thiết diện là Δ AIJ (Hình 161).



Hình 161

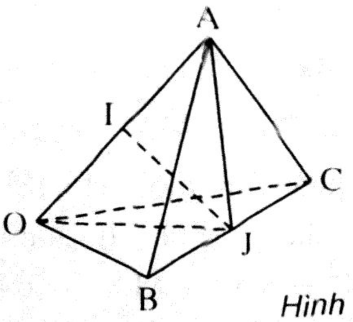
Theo chứng minh trên thì $\widehat{CAJ}$ là góc phẳng của nhị diện tạo bởi P và mp (ABC), mà $\cos\widehat{CAJ} = \frac{AE}{AC}$. Tính AE và AC.

AE là đường cao của tam giác vuông CAA' nên :

$$AC.AA' = AE.CA' \Rightarrow AE = \frac{AC.AA'}{CA'}.$$

$$\text{Vậy } \cos\widehat{CAJ} = \frac{AA'}{CA'} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$dt\Delta AIJ = \frac{dt\Delta ABC}{\cos\widehat{CAJ}} = \frac{ab}{2c}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Hình 162

490. a) $\Delta BAO = \Delta CAO$ (cgc) $\Rightarrow BA = CA$. Cũng là các tam giác cân, lại có một góc 60^o nên chúng là các tam giác đều, $\Rightarrow BA = CA = a$.

ΔBOC là tam giác vuông cân, có cạnh góc vuông a nên cạnh huyền $BC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí đảo Pitago vào ΔABC cho $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow A = 1v$.

b) J là trung điểm cạnh huyền BC của hai tam giác vuông cân BOC và BAC nên $OJ \perp BC$ và $AJ \perp BC \Rightarrow BC \perp$ mp $JAO \Rightarrow BC \perp AO$ (đpcm), và $BC \perp IJ$. (1)

Do $\Delta BOC = \Delta BAC$ (c.c.c) nên các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau:

$$OJ = AJ = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Delta JAO \text{ cân đỉnh } J \Rightarrow JI \perp AO \quad (2).$$

Từ (1) và (2) cho IJ là đường vuông góc chung của AO và BC.

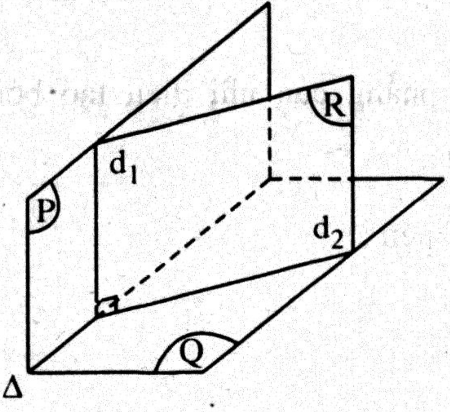
c) Xét ΔJAO, ta thấy $AO^2 = JO^2 + JA^2 \Rightarrow \widehat{AJO} = 1v$ (theo định lí đảo Pitago). Vì JA và JO cùng vuông góc BC (cmt) nên $\widehat{AJO}$ là góc phẳng của nhị diện (A, BC, O) $\Rightarrow$ mp $ABC \perp$ mp BOC.

ΔJAO là tam giác vuông cân đỉnh J nên $JI = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}a$.

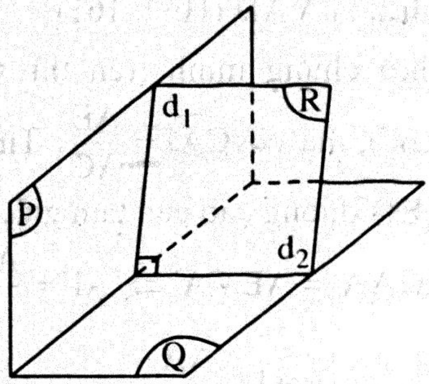
491. a) gt $\begin{cases} P \perp Q, P \cap Q = (\Delta) \\ R \cap P = (d_1) \\ R \cap Q = (d_2) \\ (d_1) \perp (d_2) \end{cases}$ KL $\{(d_1) \perp (\Delta)$ (hoặc $(d_2) \perp (\Delta)$)

Chú ý rằng đầu bài không cho mp R vuông góc đồng thời với P và Q, vì nếu có như vậy thì giao tuyến (Δ) của P, Q sẽ vuông góc với R $\Rightarrow (\Delta) \perp (d_1)$ và $(\Delta) \perp (d_2)$.

Loại trừ trường hợp trên ra thì mp R có thể vuông góc với một trong hai mp :



Hình 163



Hình 164

– Nếu $R \perp Q$ thì giao tuyến (d_1) (của P và R) cũng vuông góc với Q $\Rightarrow (d_1) \perp (\Delta)$ và $(d_1) \perp (d_2)$ (gt)

– Nếu R ⊥ P thì lập luận tương tự ta có $(d_2) \perp (\Delta)$ và $(d_2) \perp (d_1)$ (gt).

Còn nếu R cắt P, Q không theo một trong các trường hợp trên thì (d_1) không thể vuông góc (d_2), vì trái lại : $(d_1) \perp (d_2)$ sẽ phải rơi vào một trong các trường hợp trên.

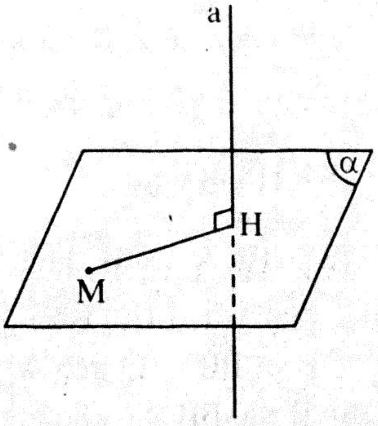
b) Định lí : nếu một đường thẳng vuông góc với một mp thì mp nào chứa nó sẽ vuông góc với mp kia.

Theo định lí này : qua A dựng AI ⊥ P và KA ⊥ Q, AI và AK giao nhau nên xác định một mp, mp này vuông góc với cả P và Q.

c) Theo câu a, ta thấy (d) // (d_1) (nghĩa là (d) ⊥ Q), hoặc (d) // (d_2) (nghĩa là (d) ⊥ P) thì qua (d) có vô số mp cắt P và Q theo hai giao tuyến vuông góc với nhau.

492. a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó đến chân đường vuông góc của mặt phẳng chứa điểm đó vuông góc với đường thẳng.

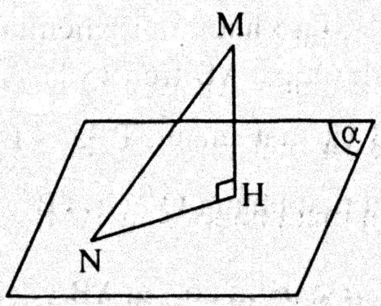
Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a kí hiệu là d(M, a), d(M, a) = MH, (Hình 165).



Hình 165

- Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a là khoảng cách bé nhất so với tất cả các khoảng cách từ M đến điểm bất kì của đường thẳng a .
- Khoảng cách từ M đến đường thẳng a bằng 0 khi M ∈ a.

b) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là độ dài đoạn vuông góc hạ từ điểm đó xuống mặt phẳng.

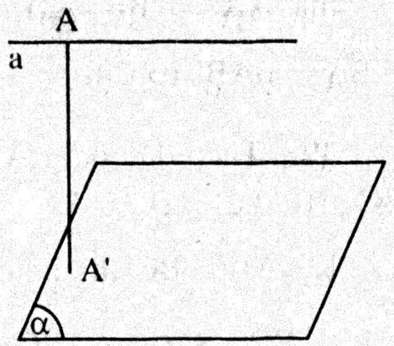


Hình 166

Ở hình 166 khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng α kí hiệu là d(M, α), vậy d(M, α) = MH.

Tính chất

- Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng α là khoảng cách bé nhất so với khoảng cách từ M đến bất kì điểm N nào thuộc α.
- Khoảng cách từ M đến α bằng O nếu M ∈ α.



Hình 167

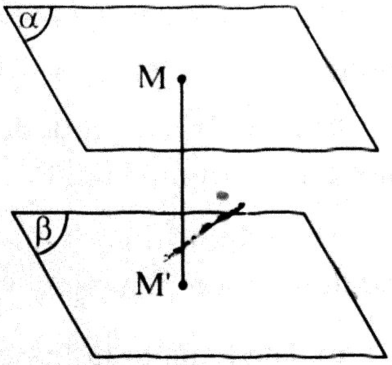
c) Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng α thì khoảng cách giữa a và α bằng 0.
- Nếu a // α thì khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng α là khoảng cách giữa một điểm bất kì thuộc đường thẳng a đến mặt phẳng α.

– Kí hiệu là $d(a, \alpha)$, vậy $d(a, \alpha) = AA'$ (Hình 167)

Tính chất. Khoảng cách từ a đến α (khi $a \,//\, \alpha$) là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng a tới một điểm bất kì của mặt phẳng α.

d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới mặt phẳng kia.



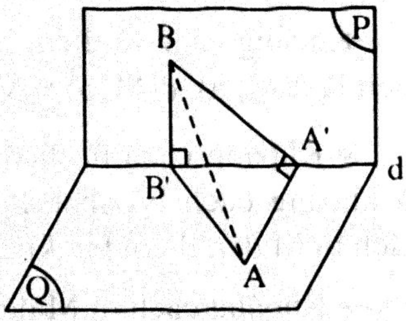
Hình 168

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $\alpha \,//\, \beta$ kí hiệu $d(\alpha, \beta)$; $d(\alpha, \beta) = MM'$. (Hình168)

Tính chất. $d(\alpha, \beta)$ là khoảng cách bé nhất so với khoảng cách của một điểm bất kì thuộc α tới một điểm bất kì thuộc β.

493. HS tự làm.

494. Từ A và B theo thứ tự kẻ AA', BB' vuông góc với d (h. 169). Do $P \perp Q$ (gt) nên $AA' \perp P$ và $BB' \perp Q$ nên AA' là khoảng cách từ A đến P và BB' là khoảng cách từ B đến Q. Theo giả thiết AA' = BB'.



Hình 169

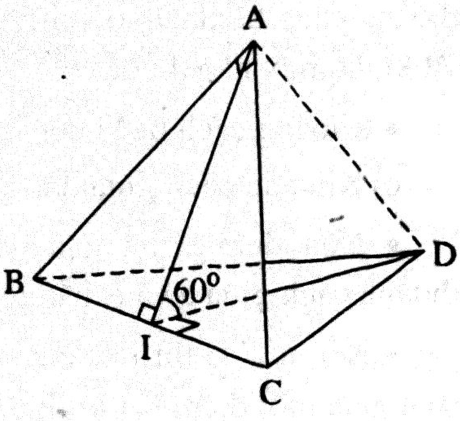
Mặt khác hình chiếu của AB trên P là A'B, hình chiếu AB trên Q là AB'. Vậy góc tạo bởi AB và mặt phẳng P là $\widehat{ABA'}$, góc tạo bởi AB trên mặt phẳng Q là $\widehat{BAB'}$.

Dễ dàng có $\sin\widehat{ABA'} = \dfrac{AA'}{AB}$, $\sin\widehat{BAB'} = \dfrac{BB'}{AB}$

mà AA' = BB' (gt) $\Rightarrow$ $\sin\widehat{ABA'} = \sin\widehat{BAB'}$ $(\widehat{ABA'} < 90^o, \widehat{BAB'} < 90^o)$ $\Rightarrow$ $\widehat{ABA'} = \widehat{BAB'}$ (đpcm).

495. Theo đầu bài : $AB = AC$, $AB \perp AC$, $BC = 16$, $DB = DC = 17$.

Kẻ $AI \perp BC$ thì I là trung điểm BC và $AI = \dfrac{1}{2}BC = 8$ (vì ΔABC là tam giác vuông cân đỉnh A). Δ BCD cân đỉnh D nên $DI \perp BC$ $\Rightarrow$ $\widehat{AID}$ là góc phẳng của nhị diện tạo bởi hai mp chứa hai tam giác : $\widehat{AID} = 60^o$ (gt).



Hình 170

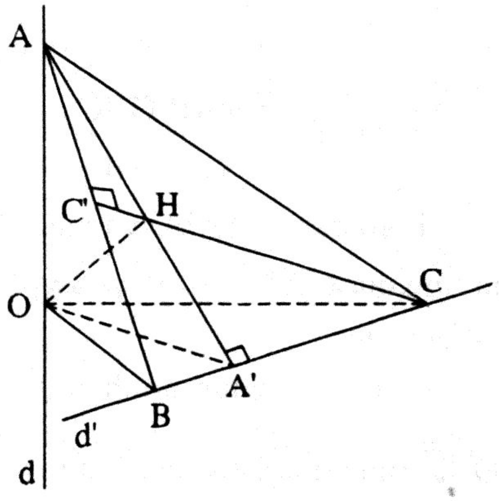
Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông DIC cho

$DI^2 = CD^2 - CI^2 = 25.9$

$\Rightarrow DI = 15.$

Áp dụng định lí hàm cosin vào ΔDAI cho

$AD^2 = AI^2 + DI^2 - 2AI.DI\cos 60^o = 169 \Rightarrow AD = 13.$



Hình 171

496. Qua d' dựng một mặt phẳng vuông góc d tại O, gọi mp BOC, mp BOC cố định vì d, d' cố định ⇒ O cố định và $\widehat{BOC} = 1v$ là góc phẳng của nhị diện tạo bởi hai mp (d, B) và mp(d, C) vuông góc với nhau (gt). Gọi H là trực tâm ΔABC. Do d ⊥ mp BOC (ta dựng) ⇒ OA ⊥ OA'.

a) OA' là hình chiếu AA' trên mp BOC nên OA' ⊥ d' theo định lí ba đường vuông góc, và OA' là đường vuông góc chung của d và d', d và d' cố định nên OA' cố định.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông BOC : $A'B.A'C = OA'^2$ không đổi. Ta có :

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = (AO^2 + OB^2) + (AO^2 + OC^2) - (OC^2 + OB^2) = 2AO^2 .$$

b) mp(A, d') cố định, do d' ⊥ AA' và d' ⊥ OA' (cmt) ⇒ d' ⊥ mp AOA' ⇒ d' ⊥ OH (1). Ta phải chứng minh OH ⊥ mp (A, d').

Thật vậy.

Theo câu a :

$$\left.\begin{matrix} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{matrix}\right\} OC \perp \text{mp } BAO \Rightarrow OC \perp BA \qquad \text{(a)}$$

Vì H là trực tâm Δ ABC ⇒ CH ⊥ BA (b)

Từ (a) và (b) suy ra : BA ⊥ mp CHO ⇒ BA ⊥ HO. (2)

Từ (1) và (2) cho HO ⊥ mp(A, d').

Do O, A, A' cố định (Cmt) ⇒ OH cố định ⇒ H cố định (đpcm).

c) C' nhìn AH cố định dưới một góc vuông nên quỹ tích C' là đường tròn đường kính AH thuộc mp (A, d') cố định. Tương tự : quỹ tích B' cũng thuộc đường tròn này.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04)39714899; (04)39714897. Fax: (04)39714897

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: SINH VIÊN

Sửa bài: THÁI VĂN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

---

500 BÀI TOÁN CHỌN LỌC LỚP 11
Mã số: 1L - 308ĐH2010
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 462 - 2010/CXB/8 - 81/ĐHQGHN, ngày 13/05/2010.
Quyết định xuất bản số: 308LK - TN/QĐ - NXBĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2010.